UNITA' DI APPRENDIMENTO: periodo di svolgimento……settembre-dicembre -gennaio………………………

Classe/i…………prime……………………………………………………………………..

Titolo UDA: **La linea dei numeri**	
Motivazione della proposta (sintetica descrizione)	Avvicinare gli alunni ad uno studio della matematica più consapevole; riconoscere l'importanza di questa scienza astratta ma capace di rispondere, sin dalle sue origini, ai bisogni primari dell'uomo. rafforzare un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e comprendere come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà. Avviare il processo che permette di riconoscersi nella frase "l'Ontogenesi ricapitola la filogenesi".
Competenza disciplinare di riferimento (max 2)	L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo, padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e il risultato di operazioni. Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).
Obiettivi specifici di apprendimento	Rappresentare insiemi di dati facendo uso di tabelle e grafici (anche usando un foglio elettronico) Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri conosciuti (numeri naturali, numeri interi, frazioni e numeri decimali) Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta Utilizzare la proprietà associativa e distributiva per raggruppare e semplificare, anche mentalmente, le operazioni.

Dott.ssa Giuseppina Gentili
coordinatrice gruppi I.M.A.S.
formatrice centro Studi Erickson

	Descrivere con un’espressione numerica la sequenza di operazioni che fornisce la soluzione di un problema. Eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni. Comprendere il significato di potenza, calcolare potenze e applicarne le proprietà. Esprimere misure utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative. Utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica
Competenze chiave europee (barrare quelle più coinvolte)	x Competenza nella madrelingua □ Competenza nella lingua straniera x Competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia □ Competenza digitale □ Competenze sociali e civiche x Imparare ad imparare x Spirito di iniziativa e imprenditorialità x Consapevolezza ed espressione culturale
ORGANIZZAZIONE E METODOLOGIA DI LAVORO	
Compito di realtà	Installazione artistica per una mostra culturale a tema mostra “*Filo vs Onto, i percorsi dell’uomo dalla preistoria ad oggi”*, la matematica nella storia”. Realizzare con legno o altro una linea del tempo nella quale rappresentare l’evoluzione dei concetti matematici, legata ai bisogni dell’uomo.
Organizzazione della classe	- Dapprima lezione frontale, poi suddivisione in gruppi, piccole isole con i banchi -
Organizzazione degli spazi	- -
Risorse esterne	-
Tempi di applicazione	- Settembre- ottobre lezione tradizionale per acquisire o richiamare i contenuti del numero naturale delle 4 operazioni

	- Novembre- dicembre-gennaio, lavori in gruppo con materiale assegnato dal docente e introduzione elevamento a potenza.	
SEQUENZA APPLICATIVA		
Titolo esperienza/attività	**Materiali**	**Osservazioni**
Numeri ovunque!	Libro, quaderno, schede assegnate dal docente	
Alle radici della civiltà	Dispense del docente per lavorare in gruppo	
A futura memoria	Legno, carta, plastica,….	
DESCRIZIONE ANALITICA DELLE ATTIVITA'E DEL COMPITO DI PRESTAZIONE		
Numeri ovunque!	Nella prima fase si richiamano i concetti aritmetici elementari, quali le caratteristiche del numero naturale, le 4 operazioni fondamentali e l'elevamento a potenza. Si parte dall'osservazione e dalla riflessione relativa alla presenza dei numeri nella nostra quotidianità. Si sottolinea come il numero e le 4 operazioni nascano da bisogni concreti dell'uomo. In questa fase svolge un ruolo centrale la lezione tradizionale frontale e il dialogo tra alunni e docente.	
Alle radici della civiltà	Lavori di gruppo, in cooperative learning, metodo JIGSAW. Si formano 4 gruppi, da essi di distaccano i componenti per formare gruppi di esperti, i quali analizzeranno le singole civiltà antiche attraverso i documenti forniti dal docente e i riferimenti internet. Successivamente ognuno tornerà al proprio gruppo di appartenenza e riferirà quanto studiato.	
CreativaMente	Fase realizzativa. Ogni gruppo costruirà una istallazione visiva della linea del tempo della matematica, fino al medioevo.	

VERIFICA E VALUTAZIONE DELLE COMPETENZE
• Rubrica compito di prestazione • Osservazioni……… • ………………………..

Dott.ssa Giuseppina Gentili
coordinatrice gruppi I.M.A.S.
formatrice centro Studi Erickson

PROGETTARE UN COMPITO DI REALTA'

<table>
<tr><td colspan="2">TITOLO: la linea dei numeri</td></tr>
<tr><td>Installazione artistica per una mostra culturale a tema mostra "Filo vs Onto, i percorsi dell'uomo dalla preistoria ad oggi", la matematica nella storia".</td><td>Competenze culturali:

- Competenza nella madrelingua
- Competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia
- Competenza digitale
- Competenze sociali e civiche
- Imparare ad imparare
- Spirito di iniziativa e imprenditorialità
-Consapevolezza ed espressione culturale

Tempi di realizzazione: 3 mesi</td></tr>
<tr><td colspan="2">Modalità di realizzazione:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Consegna del lavoro
L'associazione culturale locale CreativaMENTE ha invitato la scuola a partecipare alla realizzazione di una mostra "Filo vs Onto, i percorsi dell'uomo dalla preistoria ad oggi". (allegato 1) Una apposita commissione valuterà i lavori più originali, che saranno ricompensati con un viaggio-premio per tutta la classe.
Si discute dell'iniziativa e si valuta se opportuno partecipare.
La tua classe decide di partecipare e progettare linee del tempo visive, anche 3D, sulla storia della matematica alle origini. Sarà necessario costruire/realizzare delle istallazioni artistico simboliche che raffigurino l'evoluzione della matematica in parallelo con lo sviluppo della civiltà umana.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2)Studio dei documenti in cooperative learning
Metodo Jigsaw: la classe viene divisa in gruppi,
si formano poi 4 gruppi di esperti che si occuperanno di analizzare la matematica nella civiltà greca, in quella egizia, nel medioevo, nella preistoria. L'insegnante fornirà documenti, ma potranno reperirli anche in internet.(allegato 2)
Raccolgono notizie riguardanti le bibliografie, ricercano i documenti storici da consultare per capire le diverse tecniche di calcolo usate in passato. Inoltre ricercano fonti storiche che gli indichino come sono cambiati negli anni i simboli matematici ed il modo di eseguire le quattro operazioni e l'elevamento a potenza da loro comunemente usate.
Poi ogni esperto torna nel gruppo di provenienza e riferisce quanto ha appreso.</td></tr>
</table>

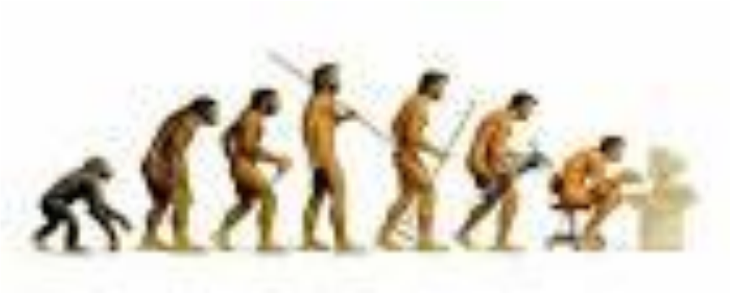
3) Progettazione e realizzazione

Ogni gruppo procede alla realizzazione di una linea del tempo che riporta in modo creativo ed originale la cronologia della matematica ai suoi albori.
Materiale a disposizione: carta, cartoncino colorato, plastilina,cannucce, stecchini, legno compensato, elastici, tempere,ecc

Allegato1 Invito alla scuola

V edizione mostra-concorso 2019

riservata alle scuole



Filo vs Onto,

i percorsi dell'uomo dalla preistoria ad oggi

Le scuole di ogni ordine e grado sono invitate a partecipare alla mostra-concorso

Ai primi classificati verrà regalato un viaggio premio.

Realizzazione di installazioni a tema sull' evoluzione

dell'uomo in ambito scientifico

Allegato 2

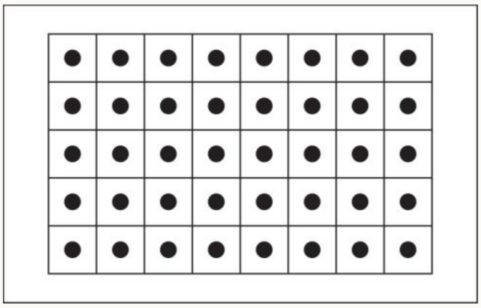
Da Enciclopedia Treccani

La matematica antica

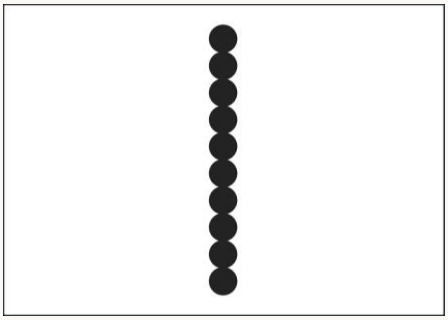
La matematica viene dall'Oriente e fino a quasi tutto il medioevo è sempre stata un prodotto orientale: la Grecia antica si può considerare la periferia dell'Oriente. Archimede di Siracusa (287?-212 a.C.) è il più "occidentale" matematico antico, ma i suoi riferimenti culturali erano tutti orientali. Si può considerare Leonardo da Pisa, detto *Fibonacci*, vissuto nella prima metà del xiii secolo, il primo matematico "occidentale".

Prima dei greci la matematica era patrimonio degli scribi, sacerdoti del tempio e del palazzo che avevano il monopolio della cultura, della scrittura e della matematica. Quest'ultima, pur presente negli antichi miti e rituali, aveva un ruolo essenzialmente pratico: calcoli relativi ad aree, a quantità di beni, a problemi amministrativi. *Harpenodaptai* (tenditori di corde) erano detti gli scribi egizi che dopo ogni inondazione del Nilo rimisuravano con corde e paletti i campi per ridisegnarne i confini.

Probabilmente la matematica si svolgeva soprattutto sull'*abaco*, che all'origine era solo una superficie piana coperta di sabbia sulla quale si potevano tracciare linee e poggiare sassolini (*calculi*, in latino). Era l'antenato del moderno pallottoliere, ma serviva probabilmente anche a realizzare costruzioni geometriche e calcolare le aree delle figure (la fig. 1 mostra come si poteva scoprire sull'abaco la regola per il calcolo dell'area del rettangolo).



Del resto, è noto l'aneddoto plutarchiano in cui si narra che lo stesso Archimede fu ucciso sulla spiaggia mentre era impegnato in una dimostrazione geometrica tracciata sulla sabbia. I sassolini finivano con l'essere nel contempo punti, quadratini unitari e unità, antenati di quelle che i greci chiameranno *monadi*, così che tanto un intervallo di lunghezza *n* quanto il numero intero *n* saranno da essi considerati una sequenza lineare di *n* unità (fig. 2).



Nella matematica antica, legata a problemi concreti (di agrimensura, di registrazione dei beni ecc.), non si trova traccia di *dimostrazioni*, ma questa assenza non deve indurre a ritenere la matematica antica una scienza poco elaborata. Per esempio, gli egizi possedevano un algoritmo per la moltiplicazione tra interi, che usava non le tabelline ma la scrittura binaria dei numeri, e che così si può descrivere: si supponga, per esempio, di voler moltiplicare 27 per 13. Si raddoppi il numero 27 e si ripeta la moltiplicazione per 2 fino a ottenere il multiplo di 27 secondo il fattore 2^n (cioè $2^n \cdot 27$), la massima tra le potenze di 2 minore di 13 (e quindi $n = 3$, perché $2^3 = 8 < 13$, mentre $2^4 = 16 > 13$), e si scriva 13 come somma di multipli di 2 fino a tale massima potenza di 2: si ottiene 13 = 8 + 4 + 1. Si contrassegnino ora con una × soltanto i multipli di 2 che compaiono in tale somma e, nella terza riga della seguente tabella, si considerino i multipli di 27 secondo i corrispondenti fattori che compaiono nella seconda riga (che possono essere semplicemente ottenuti, a partire da 27, per raddoppiamenti successivi: 27, 54, 108 ecc.). Infine, si sommino i multipli contrassegnati dalla × che compaiono nella terza riga; si ottiene: 216 + 108 + 27 = 351, che è il risultato cercato, cui si è giunti senza far ricorso a tabelline.

La tradizione pratica

La matematica pregreca, per il suo carattere pratico, si configurava essenzialmente come un insieme di tecniche di calcolo. Pur derivando da questa matematica pratica, la geometria teorica greca se ne distaccherà nettamente, al punto che dal v sec. a.C. fino al xvi sec. d.C. si possono riconoscere nella matematica due tradizioni nettamente distinte, una pratica e una teorica.

La tradizione pratica, che resterà viva fino al rinascimento, può essere definita una *matematica dell'abaco*, meno ricca di implicazioni teoriche rispetto alla grande geometria greca classica, ma tuttavia diffusa in tutto il Mediterraneo e nel Medio Oriente. È la tradizione sviluppatasi sin dal iii millennio a.C. in Mesopotamia, presente nella matematica egiziana, indiana ed ellenistica, fino a Erone e Diofanto. Era la matematica del contingente, delle applicazioni, delle professioni (amministratori e agrimensori, architetti e tecnici, artigiani e mercanti). Si tramandava soprattutto oralmente e per apprendistato (la scrittura era usata solo per elenchi di problemi e tavole numeriche), e, diversamente dalla tradizione teorica, era attenta al dato numerico empirico e alla misurazione. Il radicamento nelle applicazioni pratiche le permise di sopravvivere anche al crollo dell'impero romano d'Occidente, e di rifiorire nel medioevo tanto nel mondo islamico quanto in Europa.

Una tale matematica impermeabile alle questioni della geometria teorica, allo stile assiomatico-deduttivo e alla distinzione discreto/continuo, nella quale le tecniche erano esplicitamente aritmetiche, la geometria era sempre e solo metrica e descrittiva e non vi era una differenziazione tra unità e punto (se non nel fatto che il punto "aveva una posizione"), era in termini cognitivi una *aritmogeometria*. In questa tradizione la dimostrazione delle proprietà era lasciata alla evidenza visuale o a esempi generalizzabili, e non svolgeva alcun ruolo il *principio di omogeneità*, secondo il quale tutti i termini di una "somma" di grandezze devono avere la stessa dimensione (tutti i numeri sono segmenti, i prodotti di due numeri sono rettangoli e i prodotti di tre numeri sono parallelepipedi). Così, sia i babilonesi sia Erone potevano tranquillamente sommare aree e perimetri.

Fino al Cinquecento l'algebra sarà intesa come tecnica pratica di risoluzione di problemi numerici, in cui le quantità erano intese geometricamente e trattate aritmeticamente, così che erano di fatto inconcepibili le equazioni di grado superiore a tre o i numeri negativi. Ciò era dovuto anche al fatto che non si era ancora sviluppato un linguaggio algebrico-simbolico che permettesse un calcolo agevole, linguaggio che verrà elaborato più tardi, nel Seicento, da Cartesio, Viète, Recorde e altri.

In realtà, queste sono le uniche tracce di un approccio cognitivo geometrico, poiché sulle tavolette babilonesi si incontrano solo esempi di soluzione numerica. Ma poiché l'insegnamento nella tarda antichità era solo orale, ipotizzare un fondamento geometrico della procedura appare necessario per spiegarne, in assenza di formule, sia la descrizione che la memorizzazione. È infatti immediato ricavare la soluzione dell'equazione seguendo le indicazioni della fig. 5. Siano dati $a + b = s$, e $ab = p$. Ponendo $d =$

$|a - b|/2$, a e b sono uguali a $s/2 + d$ e $s/2 - d$. Lo gnomone di lati $s/2$ e d ha area p e quindi il quadratino bianco di lato $s/2 - b$ ha area $(s/2)^2 - p$ (che è nota). Da qui è facile calcolare b e poi a.

È da sottolineare come sia la concezione aritmogeometrica dell'abaco più che la stessa praticità a caratterizzare l'origine cognitiva e la collocazione sociale di questa tradizione. Compaiono infatti in essa anche problemi non pratici, puramente ricreativi, e in Diofanto hanno un ruolo centrale i problemi indeterminati (poco interessanti sul piano pratico), in cui le soluzioni possono assumere infiniti valori, vincolati per esempio dall'essere numeri quadrati.

La tradizione teorica

Di fronte alla tradizione pratica, nel v secolo a.C. se ne delinea una teorica, basata sulla geometria. Essa fiorisce per circa due-tre secoli, da Archita ed Eudosso sino ai grandi della matematica ellenistico-alessandrina − Euclide, Archimede, Apollonio − ai quali fanno seguito rari epigoni come Pappo. In tale tradizione la geometria non aveva alcun carattere metrico, essendo puramente teorica e centrata sulle proporzioni e sui concetti di uguaglianza e similitudine. Appariva netta in essa, contrariamente alla tradizione pratica, l'opposizione tra *numeri* e *grandezze*, tra *aritmetica* e *geometria* che durerà fino al rinascimento. E proprio tale opposizione spiega l'assoluta centralità della teoria dei rapporti e delle proporzioni nella matematica premoderna, come unico linguaggio per estendere alla geometria teorica concetti di natura aritmetica. Mentre l'aritmetica restava all'interno della tradizione pratica, la geometria teorica rompeva i ponti con la geometria dell'abaco: essa era assolutamente non metrica, giacché non esistevano in essa né lunghezze, né aree, né volumi, concetti che in qualche modo si rifacevano ad "approssimative" operazioni di misura. Oggi si dice (e qualcosa di simile dicevano i babilonesi) «l'area del cerchio è πr^2». Il matematico greco diceva invece «il rapporto fra due cerchi è il doppio rapporto dei diametri» (bisogna ricordare che i rapporti non erano numeri e *doppio* significava solo «composto con sé stesso», l'equivalente cioè di «elevato al quadrato», nella nostra terminologia).

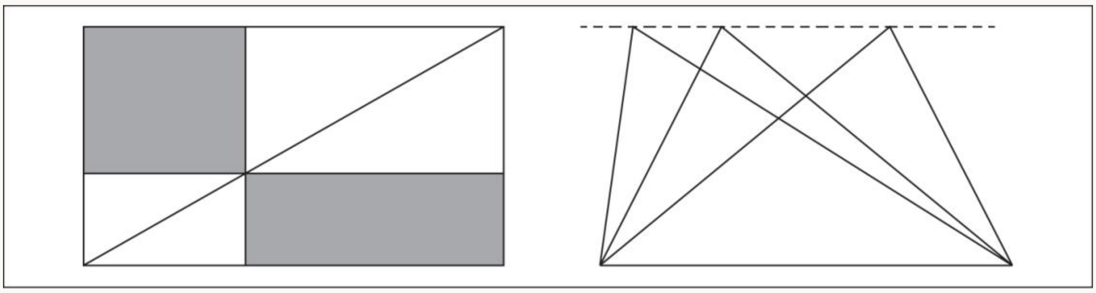
Alle radici di questa geometria teorica vi erano le idee di *uguaglianza* e *similitudine*, che saranno il denominatore comune tra matematica e filosofia greca: nella prima, daranno origine alla teoria delle proporzioni e al sistema assiomatico euclideo, nella seconda alla dottrina delle idee/forme.

I *rapporti* erano relazioni tra quantità omogenee (impensabile quindi la velocità come rapporto tra spazio e tempo) e non erano numeri; anche le figure non avevano misure: non si sommavano le loro aree, bensì si univano le figure. Tra di esse si potevano fare confronti (una figura è "uguale" a un'altra se tramite opportune trasformazioni la si può trasformare in una figura sovrapponibile a essa, la prima è invece maggiore della seconda se, dopo le trasformazioni, la contiene). Le «trasformazioni equivalenti» erano le operazioni di dissezione e riassemblaggio e le equivalenze geometriche erano basate sugli assiomi dell'uguaglianza: nell'esempio in fig. 6 sono uguali i due rettangoli tratteggiati e i tre triangoli costruiti sulla stessa base. Esiste in Euclide un doppio criterio di *uguaglianza*: in primo luogo quello arcaico della sovrapponibilità, in secondo luogo la trasformabilità nel rispetto degli assiomi dell'uguaglianza.

I greci riuscirono a risolvere in generale il problema del confronto per le figure rettilinee, ma non per le figure curvilinee; era questo il problema della *quadratura del cerchio*: non si trattava di calcolare il π (per la cui approssimazione bisognerà attendere Archimede), ma di ricercare una sequenza di trasformazioni sulle figure che rendessero equivalenti un cerchio e un quadrato.

La tradizione teorica si tramandava attraverso la scrittura e la scuola, che nelle città greche andava assumendo caratteri moderni: relativamente di massa, spesso pubblica e fondata ai livelli elementari sul leggere, scrivere, far di conto: cioè manipolare *segni*.

Certo, ci furono nel mondo greco matematici in cui coesistevano entrambe le tradizioni: il "teorico" Archimede fu anche grande ingegnere e il "pratico" Erone (i sec. a.C. - i-ii sec. d.C.) fu anche ottimo geometra: non a caso a Erone si attribuisce la formula per il calcolo dell'area del triangolo a partire dalle lunghezze dei suoi lati, una regola che per il suo carattere metrico sarebbe stata impensabile per Euclide. Tuttavia la distinzione tra queste due tradizioni era molto più netta di quella attuale tra matematica pura e applicata, le quali condividono sostanzialmente metodi, concetti, linguaggi e istituzioni formative.



Aristotele e la strutturazione deduttiva. L'aspetto centrale della tradizione teorica era la ricerca di una strutturazione deduttiva della matematica, intuita già dai pitagorici. Tale sviluppo fu portato a compimento nel iv secolo dai matematici, soprattutto nell'ambiente dell'Accademia di Platone (427-347 a.C.), e fu teorizzato da Aristotele (384-322 a.C.), il più brillante degli allievi. Nei suoi libri *Analitici* prendevano forma la *logica* e la *dottrina della scienza*, a partire dalla dialettica platonica, dal lavoro dei matematici e dagli sviluppi della filosofia naturale. Alla base vi era un sistema di principi formali: il principio del *terzo escluso*(«di un oggetto una qualsiasi determinazione deve essere o affermata oppure negata»), il principio di *non contraddizione* («non è possibile affermare e al tempo stesso negare qualcosa di un oggetto») e la *verità per corrispondenza* («è vero dire che è ciò che è e che non è ciò che non è, è falso dire che è ciò che non è e che non è ciò che è»).

Questo sistema di principi era valido solo al prezzo di frantumare il campo unitario platonico del sapere in un arcipelago di scienze "regionali", all'interno di ciascuna delle quali i principi avevano piena validità. Il mondo aristotelico era fatto di *sostanze* individuali cui potevano essere associati attributi, soprattutto *qualità* e *quantità*. Ogni scienza si riferiva a un *genere* di sostanze ben determinato, sulla base di un sistema di *assiomi* (proposizioni note e universalmente accettate) e di *definizioni* di attributi appropriati per quel genere: la dimostrazione permetteva allora di costruire le verità di tale scienza. Le scienze non comunicavano tra loro, a meno che una scienza non fosse subordinata a un'altra (come la musica all'aritmetica o l'astronomia alla geometria).

Il ragionamento scientifico assunse la struttura del *sillogismo*, una forma di argomentazione in cui da due premesse con un termine in comune si ricavava una conclusione, che resterà per duemila anni la base della logica. Una forma semplice di sillogismo era: dalle due premesse «tutti gli ateniesi sono greci» e «tutti i greci sono mortali», si concludeva che «tutti gli ateniesi sono mortali». Premesse e conclusione potevano essere universali o particolari, affermative o negative; inoltre il termine comune poteva trovarsi in ruoli diversi nelle premesse. Aristotele studiò tutte le combinazioni possibili di sillogismo e individuò quelle che effettivamente erano valide. È facile infatti notare che certe coppie di premesse non permettono di ricavare alcuna conclusione: per esempio nulla si può dedurre sull'altezza degli ateniesi a partire dalle due premesse «qualche ateniese è biondo» e «qualche biondo è alto».

La logica rispecchiava perfettamente la fisica: la proposizione era descritta come soggetto + predicato, riflesso di un mondo fatto di sostanze con annessi attributi, e il sillogismo doveva in realtà riprodurre le relazioni causali, dove la parola *causa* aveva soltanto un senso esplicativo dei fenomeni (era la risposta alla questione «perché?»).

Tale dottrina della scienza restò pressoché invariata fino al rinascimento, anche se alla sua ombra sopravvivevano i sottili paradossi formali della logica, il più importante dei quali era il paradosso del mentitore: «io sto mentendo». Se questo enunciato è vero vuol dire che è falso, ma se è falso allora è vero. Un paradosso destinato a sopravvivere fino ai giorni nostri, legato alla compresenza nella stessa proposizione della negazione, dell'essere, della verità.

Matematica e filosofia. La matematica e la filosofia erano discipline "sorelle". Entrambe concernevano la verità necessaria, l'essere e il discorso razionale, trovando le loro radici nel fatto che *vedere*, *conoscere* ed *essere* per i greci erano verbi profondamente connessi («idea» e «vedo» hanno un'origine comune e, per Aristotele, «non si può pensare senza immagini»); visuale era anche l'origine dei verbi di conoscenza come *noéo*, *theoréo*), la stessa «verità» (*alétheia*) era originariamente la negazione dell'oblio e del nascondere; gli enti matematici erano immanenti e immediatamente percepibili e nel contempo aspetti di conoscenza razionale.

Così, sul materiale ereditato dalla matematica pregreca, i pitagorici e successivamente Platone avevano eretto una filosofia complessa che da un lato accettava l'aspetto pratico della matematica (economico e sociale), e dall'altro concepiva il numero e la figura geometrica come parte integrante dell'ontologia in quanto mediatori di una realtà ideale ed elementi essenziali della stessa descrizione del *cosmo*: i pitagorici vedevano nel *numero* il costituente base della realtà, mentre per Platone gli enti matematici erano un ponte tra il «mondo delle idee» è la realtà naturale, così che Platone nel *Timeo* descriveva il cosmo con misure prive di ogni valore empirico ma tratte dai rapporti armonici musicali, ma al tempo stesso esortava Eudosso a «salvare i fenomeni» astronomici, trovandone una descrizione matematica. Su questa base tutta la tradizione pitagorica e platonica per millenni coltiverà una numerologia filosofica e teologica, ma anche una geometria descrittiva e l'idea di una presenza dei numeri nella realtà.

Diversa la collocazione della matematica nel sistema aristotelico delle scienze: da un lato essa riguardava l'essere reale nei suoi aspetti puramente logici in quanto *scienza della struttura esplicativa del reale*, scienza delle cause, della spiegazione dei fenomeni e quindi modello deduttivo per tutte le scienze, dall'altro il suo essere *astrazione* (rispetto alla materia e al divenire) ne faceva una sorta di impoverimento del reale: la matematica era un frammento del linguaggio naturale che forniva la spiegazione razionale dei fenomeni, ma la sua stessa certezza era un limite, segno di una "purezza" che finiva per configurarsi come "povertà" rispetto alla realtà naturale. Ne derivava un ruolo prevalentemente epistemologico e metodologico ben diverso dal ruolo ontologico che essa aveva in Platone.

La dimostrazione e l'incommensurabilità

Nella tradizione teorica non vi era spazio per l'algebra: tutto era percepito geometricamente, numeri inclusi. I soli enti utilizzati erano le figure geometriche e l'unica argomentazione era la *dimostrazione*. Le radici di questa tradizione si possono riconoscere nei pitagorici, i quali avevano verosimilmente rielaborato un'idea, importata dall'Oriente, di *costruzione geometrica*, cui veniva riconosciuto il ruolo di *dimostrazione* a partire da elementi, proposizioni e costruzioni più semplici. Infatti i babilonesi, pur non avendoci lasciato vere dimostrazioni geometriche o aritmetiche, conoscevano bene proprietà geometriche come il teorema di Pitagora: non solo qualche terna pitagorica, come (3, 4, 5) oppure (5, 12, 13), ma la proprietà generale, che probabilmente riconoscevano come costruzione geometrica evidente.

Il ruolo della *costruzione* nella matematica greca è anche testimoniato dal rilievo che sin dall'inizio vi ebbero alcune costruzioni particolari, quali la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo.

Il passaggio dalla costruzione alla dimostrazione geometrica è uno degli episodi più affascinanti della storia della matematica. La dimostrazione all'inizio era probabilmente solo la descrizione per iscritto della costruzione di una figura, eseguita precedentemente per via orale e visuale: in greco *diagramma* significava «dimostrazione» oltre che «figura», e negli *Elementi* ogni dimostrazione era associata a una e una sola figura, talora di una banalità sconcertante. La semplice trascrizione sembra una novità irrilevante, ma i geometri greci si accorsero che così si evitava di scoprire erroneamente proprietà non generali ma valide solo per una particolare figura. Inoltre introdussero un nuovo tipo di dimostrazione, quella *per assurdo*, che non corrispondeva a nessuna costruzione effettiva, ma solo a una costruzione "impossibile".

In effetti l'*assurdo* aveva già fatto la sua comparsa nella filosofia greca, per esempio nei paradossi di Zenone, ma solo come confutazione, come una sorta di espediente retorico per polemizzare con l'avversario. Nell'uso retorico delle contraddizioni erano maestri i sofisti, e la storia della logica antica è fondata sullo sforzo dei grandi filosofi vissuti tra la fine del v e il iv secolo, Socrate, Platone, Aristotele, di riportare le tecniche dell'argomentazione nel campo delle verità e della scienza. La semplice confutazione di un discorso avverso non è la dimostrazione della tesi contraria. Dimostrare che una tesi è assurda non significa dimostrare che la tesi opposta sia vera: a tal fine è necessario chiamare in causa il principio di *non contraddizione* e quello del *terzo escluso*, i principi formali della logica aristotelica.

Tra i risultati scoperti e dimostrati per assurdo appare uno dei teoremi più importanti di tutta la storia della matematica: l'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato, in termini moderni l'irrazionalita di $\sqrt{(2)}$. Oggi se ne trova sui testi una dimostrazione per assurdo di tipo aritmetico: se diagonale e lato del quadrato fossero commensurabili, le loro lunghezze sarebbero nel rapporto $m : n$, con m e n interi e relativamente primi (se non lo fossero si potrebbero entrambi dividere per il fattore comune), in particolare non entrambi pari. Essendo 2 il rapporto dei quadrati costruiti su di essi (per il teorema di Pitagora), sarebbe $m^2 : n^2 = 2$. Da qui segue che m deve essere pari, poniamo $m = 2k$, e quindi sarebbe $n^2 : k^2 = 2$. Quindi anche n sarebbe pari, contrariamente alla ipotesi secondo la quale m ed $n$sarebbero relativamente primi. Il che è assurdo. Ma in una tale dimostrazione il 2 appare come numero astratto, un sostantivo, mentre i numeri allora erano solo aggettivi. Tra il v e il iv secolo la dimostrazione doveva essere di tipo geometrico e prima ancora probabilmente fondata sulla teoria aritmetica della musica, la cosiddetta *armonica*. Infatti, la prima matematica greca originale, sviluppata dai pitagorici e non derivata semplicemente dall'Oriente, fu lo studio delle consonanze fra le note, misurate dai rapporti tra le lunghezze delle corde che davano tali consonanze: 1 : 2 (armonia di ottava), 2 : 3 (di quinta), 3 : 4 (di quarta).

Pitagora (570-490 ca a.C.) era originario di Samo. Coinvolto come tanti greci dell'epoca negli scontri politici della sua *pólis*, fu costretto a emigrare verso l'Italia meridionale, la Magna Grecia. Queste migrazioni erano un fenomeno diffuso nelle città elleniche dell'epoca. Provocate da ragioni politiche ed economiche, trapiantavano in un terreno vergine frammenti di società greca, creando un ambiente sociale più destrutturato di quanto fosse la *pólis*, che già risultava molto meno gerarchizzata rispetto alle società orientali e con una religione meno professionalizzata di quella delle caste di scribi del tempio orientale. I pitagorici furono una setta politico-religiosa che trasmutò le conoscenze tecnico-matematiche importate dall'Oriente in una «educazione liberale», in un sapere generale laico e religioso, politico e sociale, per governare le città della Magna Grecia: Metaponto, Crotone, Sibari, Taranto. Così aspetti tecnici come l'uso dei sassolini sull'abaco per studiare le figure geometriche sono forse all'origine di ipotesi filosofiche quale quella di studiare tutti i numeri, e anche tutti gli oggetti reali, in base alla loro *forma geometrica discreta*

Anche la musica aveva un'importanza a fini politici: essa non era un semplice intrattenimento, ma l'autentica colonna sonora della vita religiosa e sociale della *pólis* greca, al punto che Platone ripeterà: «Credo che i modi musicali non possano essere cambiati senza cambiare le leggi fondamentali della *pólis*».

Per governare occorreva dominare i *modi* musicali e questo creava problemi aritmetici: per esempio, per dividere in due parti uguali l'ottava occorreva trovare un x tale che $1 : x = x : 2$. Oggi diremmo che x vale $\sqrt{(2)}$, un numero irrazionale, ma per i pitagorici i numeri erano solo interi; solo verso la fine del v secolo a.C. Archita (430 ca-360 ca a.C.), l'ultimo grande pitagorico, scoprì che non esistevano soluzioni intere (o razionali). È questa probabilmente l'origine della *incommensurabilità*.

La matematica nella cultura antica

La geometria. Al centro della tradizione teorica si collocava la geometria, poiché la scienza greca era incentrata sulla presentazione visuale dell'*essere*, impermeabile al *divenire* naturale.

Come già si è accennato, era una geometria assiomatizzata e non metrica, perpetuata negli *Elementi* di Euclide, per duemila anni autentico monumento dell'umana ragione e culmine di una sequenza di libri di «elementi» apparsi nel iv secolo soprattutto intorno all'Accademia platonica, e derivati dall'idea pitagorica di una connessione costruttiva necessaria tra le proposizioni geometriche, da quelle più ovvie a quelle più complesse. Proclo scrive nei suoi *Commentari al I libro degli Elementi* che rispetto ad antichi libri di «elementi» Euclide aveva reso più rigorose e più astratte le dimostrazioni, sviluppandole per assurdo, e aveva esteso anche l'uso della teoria delle proporzioni.

Oltre alle definizioni, all'inizio del libro sono elencati *postulati* e *nozioni comuni* (*assiomi*). I primi hanno un carattere più costruttivo, le seconde appaiono come proprietà logiche dell'uguaglianza, probabilmente necessarie per trasformare antiche dimostrazioni basate sulla evidenza visuale in dimostrazioni rigorose per assurdo.

Le proposizioni appartengono poi a due categorie ben distinte, i *teoremi* e i *problemi*: i primi riguardano proprietà delle figure, i secondi invece costruzioni di enti geometrici, fondamentali in un'idea di dimostrazione emersa dall'idea di costruzione geometrica.

Il metodo euclideo è detto *assiomatico-deduttivo*, un'espressione usata anche per la matematica moderna, ma con un diverso significato. In realtà l'uniformità è solo apparente. Nella geometria greca, come del resto ancora oggi nell'insegnamento fino alle scuole superiori, non si fa differenza tra *dimostrabilità* e *verità*. Eppure la differenza è evidente. Si consideri per esempio la proposizione «in ogni triangolo la somma degli angoli interni è due angoli retti»; la sua *dimostrazione* è una paginetta di proposizioni concluse dalla frase «come volevasi dimostrare», e dopo la quale non sussiste alcun dubbio sulla validità del teorema. Se volessimo stabilirne la *verità* dovremmo invece prendere «tutti» i triangoli (ritagliati sul cartoncino, costruiti tramite le punte dei campanili, delle montagne e anche usando stelle e galassie) e calcolare su di essi la somma degli angoli interni. Sono due procedure del tutto diverse: la prima è unica anche se generale (su un triangolo «qualsiasi») la seconda è infinitaria (su «tutti» i triangoli); la prima è assolutamente certa, la seconda è sempre approssimata. Questa è la differenza tra *sintassi* (la manipolazione delle proposizioni secondo regole puramente formali e quindi indipendenti dal significato dei termini) e *semantica* (assegnazione del significato ai singoli termini e conseguente significato globale della proposizione). Per i greci questa distinzione non esisteva: ciò che era dimostrabile era vero e ciò che era vero era dimostrabile, eccezion fatta per gli assiomi e i postulati, la cui verità doveva essere del tutto evidente.

Diverse erano le conseguenze di questa coincidenza tra sintassi e semantica. In primo luogo, i termini tecnici della geometria euclidea non ricevevano il loro significato dalle definizioni, ma lo possedevano già come *termini del linguaggio naturale*, che la definizione si limitava a precisare. In secondo luogo, da Aristotele a Proclo, si distingueva tra teoremi in cui la deduzione aveva un ruolo «causale» e teoremi in cui la deduzione era puramente «formale», come per esempio nel teorema precedente, nella cui dimostrazione appaiono gli angoli esterni al triangolo, i quali non possono avere alcun ruolo causale sul triangolo (la somma degli angoli interni sarebbe due angoli retti anche se gli angoli esterni non esistessero).

In realtà la logica aristotelica aveva diverse radici: la teoria del sillogismo derivava dalla filosofia naturale (col sillogismo a mimare la relazione causale), la dottrina della scienza dalla geometria, e infine il sistema dei principi dalla dialettica. Così che, più che di una derivazione diretta del sistema assiomatico-deduttivo euclideo dalla logica aristotelica, si deve piuttosto parlare di una profonda affinità.

La conseguenza più celebre di questa coincidenza tra sintassi e semantica è stata per duemila anni la questione del v postulato, relativo alle parallele. Esso afferma: «Se una retta incidente due rette crea angoli interni sullo stesso lato minori di due retti, le rette, qualora prolungate all'infinito, si incontreranno dal lato sul quale gli angoli sono minori di due retti» (era una sorta di postulato di costruzione del triangolo); oggi si esprime nella forma: «Dati una retta e un punto a essa esterno, per tale punto passa una e una sola retta parallela alla prima». Tale postulato era ritenuto vero perché legato a tante altre proposizioni vere (costruzione del quadrato, teorema di Pitagora ecc.), ma non sembrava evidente. Di conseguenza doveva essere dimostrabile ma, nonostante decine di tentativi autorevoli, nessuno era riuscito a darne una dimostrazione. Solo nel xix secolo l'emergere della distinzione tra sintassi e semantica rese concepibili geometrie in cui tale postulato non era soddisfatto.

La dimostrazione procedeva da «cose più note» verso «cose meno note», dagli assiomi/postulati ai teoremi/problemi, una procedura nota anche come *sintesi*, che caratterizza lo stile di Euclide negli *Elementi*. Ma nella matematica greca appariva anche la procedura opposta, detta *analisi*, che partiva da «ciò che si cerca» per risalire a «ciò che già si sa». L'idea fondamentale era quella che invertendo le deduzioni di una delle due procedure si otteneva l'altra, ma in realtà $A \Rightarrow B$ non implica $B \Rightarrow A$, così che per garantire la correttezza logica dei risultati l'analisi doveva sempre essere seguita dalla sintesi corrispondente.

Maestro dell'analisi fu Apollonio (262 ca-180 ca a.C.). Per capirne la grandezza basta pensare che sviluppò la teoria delle coniche (le figure ottenute per sezioni di un cono tramite un piano al variare della sua inclinazione: cerchio, ellisse, parabola, iperbole), nata probabilmente da esperienze di misurazione astronomica (meridiana, astrolabio), in quanto le stelle si muovono rispetto a un osservatore terrestre su cerchi che col vertice nell'osservatore formano un cono, la cui sezione con un piano è una conica. Apollonio ottenne per via geometrica tradizionale gran parte di quello che oggi si studia sull'argomento usando il formalismo algebrico.

Aritmetica teorica e aritmetica pratica. Del tutto diversa era la struttura dell'altra disciplina fondamentale, l'*aritmetica*. Gli *Elementi* includevano anche tre libri aritmetici (vii, viii, ix), in cui l'aritmetica veniva trattata rappresentando i numeri come segmenti.

Era un'aritmetica basata su postulati e dimostrazioni, e sui concetti di rapporto e di proporzione, in un certo qual modo adottata dalla geometria.

L'aritmetica pratica aveva però una struttura molto diversa: non usava dimostrazioni ma esempi, ed era anche legata al calcolo e alla misura. Inoltre appariva organicamente connessa alla filosofia e alla teologia, dominata da un clima pitagorico e platonico fino alla fine dell'antichità: il testo più importante dell'aritmetica greca fu quello di Nicomaco, vissuto ad Alessandria tra i e ii secolo d.C., il più noto di una serie di testi in cui l'aritmetica veniva descritta all'interno della tradizione neoplatonica, senza alcuna parentela con la grande tradizione dei geometri teorici e nella quale ogni numero era figurato ed entrava direttamente nella costituzione stessa della realtà.

La notazione numerica dei greci era poco funzionale. Niente di strano che al mercato usassero una notazione simile a quella degli antichi romani, con un asta per indicare l'uno e poi l'aggiunta di un'asta per il successore, e l'uso delle iniziali dei numeri in greco per indicare numeri particolari, cinque (Π, *pente* in greco), dieci (Δ, *deka* in greco) ecc. Sorprende che i grandi matematici greci usassero per i numeri le lettere dell'alfabeto: α per l'uno, β per il due, e così via. L'alfabeto greco ha 24 lettere, aggiungendo tre lettere arcaiche di origine fenicia si arrivava a 27 simboli con cui denotare le nove cifre, le nove decine, le nove centinaia. E poi, dopo 999? Bisognava usare apici. Ma con un simile sistema erano molto difficili anche le somme elementari. Come si spiega l'uso di questa notazione davvero poco funzionale? In primo luogo, esso era probabilmente una conseguenza del fatto che il linguaggio della matematica greca era un frammento del linguaggio greco comune. In secondo luogo occorre osservare come questa rappresentazione introducesse il carattere ordinale e non solo cardinale del numero (e Piaget ha descritto come nel bambino il numero astratto nasca dal coordinamento tra i suoi aspetti cardinali e ordinali). In altri termini, la difficoltà nel calcolo era il prezzo da pagare per fare dell'aritmetica un frammento autonomo del linguaggio e concepire il numero come un ente astratto e non solo come un aggettivo.

Non esistevano né i numeri *reali* né i numeri *razionali* (eccettuate le *parti*, cioè le frazioni unitarie quale $1/n$, molto usate già in Egitto). Ovviamente, al mercato esistevano dei modi pratici per trattare le frazioni, ma questo non aveva nessuna eco nell'aritmetica greca.

L'architettura complessiva della matematica era quella del quadrivio, in cui alle due discipline di base, *aritmetica* e *geometria*, si aggiungevano altre discipline che il medioevo chiamerà *miste*: in primo luogo *astronomia* e *musica* per completare il quadrivio, e poi anche *ottica* e *statica*. Altre scienze miste verranno aggiunte nel medioevo.

Queste discipline erano dette *miste* perché apparivano "inquinate" dalla fisica. La matematica, in quanto scienza dell'*essere*, non poteva essere applicata alla fisica né ad alcuni suoi settori quali la meccanica, la biologia, la psicologia, perché la fisica trattava del *divenire*(*phýsis* era la *natura* vista nel suo continuo fluire, e anche l'anima era considerata un ente naturale). In altri settori della fisica il divenire tuttavia non appariva: nella statica, ma anche in ottica, che non considerava la luce come "in moto", ma ne considerava solo gli aspetti geometrici; in musica, in cui le consonanze erano trattate come rapporti fissi; in astronomia, in cui si ignorava il concetto di *traiettoria* dei corpi celesti e si studiavano solo le proprietà geometriche delle grandi sfere rotanti, ma fisse, nelle quali i corpi celesti erano incastonati. L'astronomia greca chiarisce il senso della geometria greca. Mentre i babilonesi avevano dato vita a un'astronomia d'osservazione, caratterizzata da grandi quantità di dati e una notevole capacità di previsione dei fenomeni astronomici (come le eclissi lunari), ma priva di un *modello* dei cieli, i greci elaborarono un'astronomia senza dati osservativi e costituita solo da un modello dei cieli, il *cosmo*, basato su sfere rotanti e complicato da sfere rotanti incastonate in altre sfere rotanti. Solo più tardi, soprattutto con Claudio Tolomeo, questo modello geometrico si arricchì dei dati osservativi e costituiì il cosiddetto *sistema tolemaico* che resse fino a Copernico. L'*Almagesto* (nome arabo che significa «il più grande») è il capolavoro di Tolomeo; insieme agli *Elementi* costituisce la grande eredità della scienza greca, e, insieme alle opere di Nicomaco, Erone e Diofanto, segna l'epoca d'oro della tradizione pratica in Alessandria.

Il continuo e l'infinito

L'idea di *continuo* non aveva natura immediatamente matematica, ma proveniva dall'indagine filosofica sull'*essere* e il *divenire* (il *moto*), iniziata dagli eleati (Zenone ne aveva rivelato i paradossi) e sviluppata da Platone e Aristotele, il quale ne aveva dato una doppia caratterizzazione tuttora valida: l'(*infinita*) *divisibilità* (dalla quale deriva l'idea moderna di *denso in sé*) e la dicotomia in parti con elemento comune (dalla quale deriva l'idea di *continuità* costruita sulla base delle sezioni di Dedekind). Era un concetto fondamentalmente fisico, estraneo alla matematica: il termine *continuo* (*synechés*), come opposto di *discreto*, negli *Elementi* non appare mai.

Anche l'idea di *infinito* non apparteneva alla matematica ed era un concetto sostanzialmente fisico. In Euclide il termine *infinito* (*ápeiron*) appare in forma solo avverbiale, per affermare che la retta può essere prolungata illimitatamente: era l'*infinito potenziale* («si può sempre aggiungere qualcosa») che si ritrova soprattutto nella serie dei numeri interi, mentre l'*infinito attuale* («non si può aggiungere nulla») era precluso, in quanto fonte di dubbi e paradossi. Questi due *infiniti* erano l'uno il contrario dell'altro, e non il contrario del *finito*. Anche le sezioni coniche, prima di Apollonio, erano costruite su coni finiti. Quella euclidea era una geometria piana senza il piano, una geometria solida senza lo spazio, una geometria di figure e solidi finiti che non richiedono un ambiente infinito che li contenga.

Lo stesso Apollonio nel suo studio delle coniche introduce *rette di riferimento* sulle quali "proiettare" le posizioni di punti delle curve, individuando segmenti tra i quali riconoscere relazioni geometriche nella forma di rapporti caratteristici delle curve (chiamati *sýmptoma*). Molti storici hanno creduto di riconoscere in queste enunciazioni i prodromi della geometria analitica moderna (con gli assi x, y, z di un sistema di riferimento, le coordinate dei punti, le equazioni delle curve). C'è però un'importante differenza: i concetti di Apollonio erano intrinseci alla curva (assi, diametri, tangenti), mentre quelli moderni sono estrinseci a essa e relativi invece a uno spazio indipendente che contiene la curva.

Tale preclusione nei confronti dell'infinito attuale si associava poi a quella nei confronti dell'esistenza reale del *punto*. Il punto infatti, come sarà poi per il *numero reale*, richiede una suddivisione infinita *attuale* del segmento, poiché una suddivisione infinita potenziale produce solo intervalli. E risulta chiara anche l'impossibilità di considerare un segmento come costituito dai suoi punti: come potrebbe un ente di grandezza finita essere costituito dall'unione di infiniti enti privi di grandezza? E si può concepire il punto immediatamente successivo a un altro punto? Non è possibile, poiché se tale punto è distinto allora tra i due punti esiste un intervallo il cui punto medio si colloca fra di essi, e quindi il punto trovato non è quello immediatamente successivo.

Aporie erano già emerse in Democrito (460 ca-370 ca a.C.), che si era posto il problema di considerare un cono come unione delle sue sezioni parallele alla base: se tali sezioni erano uguali allora la loro unione era un cilindro, se invece erano disuguali allora la loro unione era un cono "a gradini".

Platone considerò i punti solo finzioni geometriche, in realtà non esistenti. Aristotele li ritenne esistenti ma solo *in potenza*, così che tutti i punti di un intervallo esistono in potenza ma non possono costituirlo poiché avrebbero bisogno a tal fine di esistere *in* *atto*, creando le difficoltà sopra accennate. E del resto, quando un punto divide in due un segmento, il punto stesso si duplica come estremo di entrambi, e il duplicato così nascerebbe dal nulla, ma *nihil ex nihilo*. L'idea di base era che l'*essere* del punto si esaurisse nella sua individuazione come estremo o intersezione, senza avere altra forma autonoma di esistenza.

L'infinito quantitativo. Ad Aristotele si deve l'inizio della teoria dell'infinito quantitativo, costruito sulla dicotomia della quantità in *discreta* e *continua*. Egli osserva come i numeri ammettano un minimo indivisibile (l'unità) ma non un massimo (l'infinito è solo potenziale), mentre le grandezze (geometriche), il cui paradigma era l'*intervallo*, non ammettano un minimo (sono potenzialmente divisibili all'infinito) ma abbiano un massimo (l'universo aristotelico era finito).

Le proprietà fisiche diverse da tempo e spazio (peso, velocità, calore ecc.) erano «qualitative». Quantità erano solo da un lato quelle geometriche e il tempo (continue), dall'altro i numeri e il linguaggio (discrete); per questo le velocità potevano essere confrontate solo come spazi percorsi in un tempo fisso o come tempi impiegati per percorrere una data distanza.

La *misura* era un concetto essenzialmente aritmetico: un numero "misurava" i suoi multipli, ne era cioè una *parte*. Al mercato si misurava il peso o la lunghezza, ma erano numeri accidentali. Mentre infatti l'unità di misura del gregge di pecore era intrinseca, *sostanziale*(la singola pecora), l'unità di misura della lunghezza era il braccio o il piede. Ma il braccio o il piede di chi? Era una misura puramente accidentale, e città diverse avevano unità di misura diverse. La geometria si doveva quindi strutturare senza una metrica. E anche queste misure accidentali erano sempre numeri interi, connesse tra di loro tramite fattori moltiplicativi accidentali e interi, come nelle misure inglesi: ci sono piedi e pollici, 12 pollici fanno un piede. Ma non è lo stesso che dire che 100 cm equivalgono a 1 m: infatti 12 è solo un rapporto accidentale tra unità autonome ed eterogenee, anche se convenzionalmente consolidato.

Per i greci, in realtà, irrazionali potevano essere i rapporti (relativi a grandezze incommensurabili), ma non i numeri. Per essi i numeri erano solo interi, cardinali e finiti, erano di fatto aggettivi (1, 2, 3, 4, 100, 1000, 10000 erano declinati in genere, numero e casi), erano molteplicità definite, attributi reali. Era anche difficile considerare l'*insieme* dei numeri, poiché questo significava ammettere l'infinito: così Euclide non dice «ci sono infiniti numeri primi», bensì «i numeri primi sono più di ogni molteplicità proposta di numeri primi», e nelle dimostrazioni non compare mai esplicitamente il *principio di induzione completa*, sempre sostituito da dimostrazioni (generalizzabili) per un numero finito, nonostante appaiano postulate proprietà sostanzialmente equivalenti, come «non è possibile una sequenza infinita decrescente di numeri interi».

Se si chiede oggi a uno studente di rappresentare con una immagine il sistema dei numeri, probabilmente egli disegnerà una retta, con un punto indicato con 0 e un altro indicato con 1. Traccerà cioè la retta numerica, con la quale si rappresenta oggi la corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta, scrivendo un numero reale come due sequenze di cifre separate da una virgola, √(2) come 1,41421356…., π come 3,14159…, un numero reale generico come: … $a_3a_2a_1a_0,a_{-1}a_{-2}a_{-3}$ … senza accorgersi del fatto che quella piccola virgola separa due universi radicalmente differenti in tutta la storia della matematica, che solo quattro secoli fa hanno trovato un punto di raccordo. La prima sequenza, a sinistra della virgola, appartiene al dominio dei *numeri interi*, alla *numerazione*, utilizzata per contare uomini e pecore, origine dei segni numerici. Al di là della virgola, la seconda sequenza appartiene a un mondo parallelo ma distinto: l'universo delle *grandezze*divisibili. Inoltre, mentre la prima sequenza è sempre finita anche se potenzialmente illimitata, la seconda può e *deve* essere attualmente infinita per denotare un generico numero reale.

Un greco avrebbe invece rappresentato il sistema dei numeri disegnando due semirette puntate verso il basso, come un lambda maiuscolo, Λ, tracciando quella che è appunto detta *figura lambdoide*. L'origine comune era indicata con 1, una delle due semirette segnata con i numeri interi 2, 3, 4, …, e l'altra con le frazioni 1/2, 1/3, 1/4, …, quelle che i greci chiamavano le *parti*.

L'*uno* non era un numero, ma il "seme" delle due sequenze, e lo *zero* non esisteva. Addirittura le definizioni euclidee erano date in modo da escludere anche l'angolo nullo o il rapporto nullo. La ragione di questa stranezza che durerà fino al rinascimento la si può leggere nel *Sofista* di Platone: «Poni che uno alla domanda "a che cosa può essere riferito questo predicato, il *non essere*", osasse dare una risposta, ebbene, a quale oggetto e con quali determinazioni di quantità e qualità riferirebbe tale espressione? […] A ciò che noi indichiamo con l'espressione "ciò che è" non può riferirsi il *non essere*, neppure a ciò che indichiamo con l'espressione "qualche cosa" […] il singolare è segno di una cosa, […] il plurale di molte cose. E devi ammettere che chi non dice "qualche cosa" non dice niente in assoluto. Inoltre non possiamo ammettere che questo tale "usi una espressione", ma non dica nulla; bisogna riconoscere che chi crede di dire ciò che non è, non usa espressione alcuna: non *dice* neppure […]». Il numero è sempre un numero di *cose*. Esistono quindi il singolare e il plurale, ma non esiste lo *zero-ale*. Esiste quindi l'*uno*, esiste il *numero*, ma non esiste lo *zero*. La matematica greca era un frammento della lingua greca.

Questo è un altro punto importante. La cultura occidentale, sin dal medioevo, è *multilinguista*: è consapevole dell'esistenza di molti linguaggi naturali (e delle relative traduzioni), e dell'esistenza di linguaggi formali artificiali (l'algebra, la logica, i linguaggi di programmazione ecc.). I greci erano rigorosamente *monolinguisti*, consideravano solo il greco. Certo, talora conoscevano altre lingue, ma erano solo "balbettii" (questo in origine il significato del termine «barbaro»). Anche le definizioni, come negli *Elementi* di Euclide, non servivano a introdurre nuovi termini nel linguaggio ma a delimitare e precisare in geometria l'uso tecnico di normali parole. Emblema di questa centralità teoretica del greco tra i greci è forse la parola *lógos*, che significava «parola», «discorso» ma anche «rapporto matematico», «ragione», «pensiero», «definizione».

I rapporti nel discreto e nel continuo

A Eudosso (408-355 a.C.) si devono alcuni dei risultati più importanti della storia della matematica. In primo luogo il modello geometrico dei cieli cui si è accennato nel paragrafo precedente. Un secondo contributo essenziale è la sua teoria delle proporzioni, una dottrina centrale per la matematica greca e medievale, essendo l'unico ponte tra discreto e continuo.

Il rapporto, il *lógos*, era inizialmete un concetto solo aritmetico, ma non un numero, bensì una relazione tra due numeri. Nell'antica aritmogeometria, ovviamente, questo concetto aritmetico poteva estendersi facilmente alla geometria: il rapporto tra base e altezza di un rettangolo nell'abaco era il rapporto tra il numero di unità su di esse. Ma la geometria teorica greca si era distaccata dalla matematica dell'abaco e l'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato dimostrava che non si potevano ricondurre le figure geometriche a configurazioni di unità: per quanto si riducesse l'unità di misura non si riusciva a misurare contemporaneamente lato e diagonale del quadrato con un numero intero. Eudosso forse osservò come i rapporti tra segmenti incommensurabili, pur non essendo aritmeticamente definibili con esattezza, potevano essere aritmeticamente approssimati quanto si voleva. Già i babilonesi avevano trovato ottime approssimazioni numeriche per $\sqrt{(2)}$. Le approssimazioni si potevano fare o per difetto o per eccesso. Per esempio un'approssimazione per difetto per $\sqrt{(2)}$ è:

$1 \to 1{,}4 \to 1{,}41 \to 1{,}414 \to 1{,}4142 \to \ldots$, una per eccesso è:
$2 \to 1{,}5 \to 1{,}42 \to 1{,}415 \to 1{,}4143 \to \ldots$ Qualunque numero razionale si prenda si può sempre dire se sia maggiore o minore di $\sqrt{(2)}$.

Non potendosi esprimere con numeri un rapporto tra grandezze incommensurabili, la questione che Eudosso si pose fu se fosse possibile almeno dire se due rapporti $a : b$ e $c : d$fossero *uguali* (l'uguaglianza e la similitudine erano i concetti base della geometria dell'epoca), ossia se valesse la *proporzione* $a : b = c : d$. In caso affermativo, le approssimazioni dei due rapporti dovevano essere comuni, e allora qualunque approssimazione m / n se era per eccesso per un rapporto lo era anche per l'altro, e quindi per ogni m e n si aveva che $mb > na$ se e solo se $md > nc$. La notazione algebrica e aritmetica qui usata era inesistente a quei tempi, ma il ragionamento si poteva fare ugualmente nel linguaggio geometrico dell'epoca, e, considerando quella condizione non solo necessaria ma anche sufficiente, si otteneva la definizione eudossiana della uguaglianza tra rapporti: «Grandezze sono dette essere nello stesso rapporto, la prima con la seconda e la terza con la quarta, quando, per qualsiasi multiplo, gli equimultipli della prima e terza siano entrambi maggiori o uguali o minori dei corrispondenti equimultipli della seconda e della quarta». È nel libro v degli *Elementi* che viene delineata questa teoria delle proporzioni: i teoremi sono «teoremi generali», in quanto valgono per numeri e per grandezze geometriche, ma non configurarono mai una *scienza generale* e nel libro vengono riferiti alle grandezze semplicemente perché i greci non concepirono mai un genere comune a numeri e grandezze: la *quantità* era solo una categoria.

Due rettangoli le cui dimensioni avessero lo stesso rapporto erano *simili*, e avevano allora un rapporto che era il «doppio» (cioè il quadrato) del rapporto tra le dimensioni. Si dimostrava lo stesso risultato per i poligoni simili e si intuiva qualcosa di simile per i cerchi (fig. 9), considerando un cerchio come un poligono con moltissimi lati. Ma pensare a infiniti lati significava considerare un infinito *attuale*, qualcosa di inconcepibile.

Diofanto

Ad Alessandria è legato anche il nome di un matematico di cui non si sa quasi nulla e che resterà sconosciuto per tutto il medioevo, per diventare famoso con la nascita della matematica moderna: Diofanto (iii sec. d.C.), cui si deve l'ultima grande creazione della tradizione pratica dell'antichità: il primo *simbolismo algebrico*.

Sin dai babilonesi, l'algebra appare parte integrante della tradizione pratica, come soluzione aritmetica delle equazioni all'interno di una verosimile interpretazione aritmogeometrica dei problemi. In Diofanto si trova invece un autentico simbolismo: ς è l'incognita, probabilmente derivata da *arithmós*, Δ^{γ} è il suo quadrato, K^{γ} è il suo cubo, ι^{σ} sta per il segno di uguale (*ísos*), μ^{o} è la monade e ↑ sta per il segno meno. Come si è detto, i numeri venivano rappresentati alfabeticamente.

Eccone un'applicazione che si trova in un matematico bizantino del xiii secolo, editore di Diofanto, Massimo Planude (a sinistra nella tabella, a destra se ne dà una traduzione in forma moderna). Non si conoscono altre versioni precedenti e la notazione potrebbe quindi non essere del tutto quella originaria di Diofanto, ma una notazione simbolica analoga si trova in un papiro matematico che risale al ii secolo, e si può quindi ascrivere la nascita di questo simbolismo algebrico alla matematica pratica tardoantica.

Rispetto agli esempi concreti sulle tavole babilonesi, in Diofanto il problema viene posto in modo astratto. La risoluzione babilonese sembrava seguire i passi di una procedura ben definita, probabilmente legata alla costruzione di una figura (fig. 5) nella quale interpretare i dati numerici del problema e che permetteva di ricavarne la grandezza incognita, mentre Diofanto sembra maneggiare diverse condizioni in forma di *equazioni* che hanno la loro origine nell'algebra geometrica e nelle proprietà dell'uguaglianza, ma vengono ora manipolate per riscrivere le condizioni del problema. Il *tempo* della risoluzione non è più quello della *costruzione*, ma è puramente *funzionale*, nel senso che la soluzione si ottiene dalla sequenza di diversi passaggi a partire dai dati e dall'incognita del problema (spesso col vincolo di soluzioni intere), e la possibilità di iterare i simboli permette di esprimere potenze superiori alla terza, liberando così tali tecniche dalla limitazione del linguaggio geometrico. L'origine pratica e geometrica delle tecniche e dello stesso linguaggio algebrico appaiono però chiare anche in queste procedure simboliche, come nell'accettazione di sole soluzioni positive o nell'uso di un quadrato disegnato per denotare un quadrato aritmetico, oppure ancora nell'uso del termine «lato» (*pleura*) per il valore di cui si calcola il quadrato. Non esiste il prodotto tra incognite poiché il quadrato o il cubo non sono il prodotto dei rispettivi lati, ma figure; il prodotto tra un numero e l'incognita o la somma di termini sono date per semplice giustapposizione, come nell'algebra geometrica; i numeri sono semplici aggettivi che devono essere applicati a un'incognita o alla monade per diventare termini. Il segno ↑ compare come la parola «meno» nelle frasi in linguaggio naturale.

È da notare come il *calcolo* segua la stessa evoluzione della *dimostrazione* a partire da una comune origine (la *costruzione della figura geometrica*) tramite una *traduzione sintattica*, un'analogia questa tra *calcolo* e *dimostrazione* che si ripresenterà ancora in matematica. Quanto ciò sia peculiare si può cogliere osservando come le equazioni non comparvero mai nella matematica cinese, che proprio per questo, nonostante il grande sviluppo delle sue tecniche di soluzione dei problemi, non riuscì mai a creare una vera algebra.

La fine della matematica antica. La matematica antica finisce prima della caduta dell'impero romano. I romani avevano sviluppato una fugace passione per la cultura greca, all'inizio del periodo imperiale, al punto che in qualche misura l'impero era diventato bilingue: Cicerone per la filosofia e la retorica, Vitruvio per l'architettura erano state figure in cui riecheggiava la cultura greca. Ma progressivamente la romanità era tornata a prevalere. Del resto la stessa lingua latina mostra l'origine molto più pratica dell'idea romana di conoscenza: mentre i verbi greci di conoscenza richiamavano la visione e la memoria, quelli romani ricordavano l'esperienza pratica: *sapio*, *sapientia* («avere sapore»), *puto*, *computo* («potare»), *penso* («pesare»), *verus* («dritto, spiedo»), *cultura* («coltivazione»), *scientia* («tagliare»), forse anche *cogito* (da *cogo*, «raccogliere»). La divisione dell'impero in impero d'Occidente e Oriente fu non solo un espediente logistico, ma anche l'esito di una frattura culturale che, a partire dal iv secolo d.C., vide la scomparsa definitiva della matematica (e della filosofia) greca dall'Occidente; solo la retorica vi sopravvisse come traccia di quella antica influenza. La matematica si rifugiò allora nella sua terra d'origine, l'Oriente.

La fine dell'antichità e l'alto medioevo

Fra il v e il x secolo d.C. in Europa occidentale le popolazioni di cultura latina assistono al disgregarsi del loro mondo, sottoposte a invasioni e scorrerie continue dalla Scandinavia, dall'Asia, dall'Europa orientale e dai paesi islamici. La crisi, aggravandosi, travolge la produzione economica, il commercio interregionale, la cultura, e segna il tramonto delle città. Dopo il crollo dell'impero d'Occidente, le aggregazioni politiche che si costituiscono hanno in genere vita difficile: le popolazioni si rifugiano nei villaggi intorno ai castelli che diventano il cuore dei rapporti economici e sociali, delineando quella che viene detta la *società feudale*.

Il declino della cultura è profondo e inarrestabile: scompaiono le scuole, impallidisce la conoscenza del latino (dopo che quella del greco è caduta in un totale oblio) con l'unica eccezione degli ambienti religiosi, mentre nella vita quotidiana la lingua d'uso inizia a evolversi in quelle che diverranno le future lingue nazionali. Il latino rimane la lingua della cultura, unico strumento unificante della società europea, universale come la chiesa, ma senza vere radici sociali: il suo ruolo è del tutto diverso da quello dell'arabo nell'Islam (il Corano non si può tradurre, mentre i Vangeli sono multilinguistici sin dall'origine: la versione ufficiale della Bibbia è in greco e in latino già nella tarda antichità, e a partire dalla riforma protestante viene tradotta in tutte le lingue nazionali, senza che ciò ne infici il valore religioso), e anche quando nel rinascimento si cercherà una lingua originaria nella quale trovare il vero nome delle cose, la si cercherà nell'ebraico, o addirittura nel cinese, ma non nel latino.

Della matematica sopravvive solo la tradizione pratica nella sua forma più elementare, legata ai più semplici calcoli del commercio, dell'agrimensura e della architettura. Il *Codex arcerianus*, la principale fonte matematica dell'alto medioevo, raccoglie le conoscenze matematiche di carattere pratico diffuse negli ultimi secoli dell'impero d'Occidente e utilizzate dai *gromatici*, così chiamati per l'uso della *groma*, un lungo bastone provvisto in cima di un paio di sbarre orizzontali usato nei rilevamenti per traguardare.

La matematica e il cristianesimo

Unico riferimento culturale dell'Occidente europeo è il cristianesimo, ma il rapporto tra esso e la cultura classica antica è tutt'altro che lineare. Il cristianesimo antico da un lato si diffondeva soprattutto tra strati popolari urbani, dall'altro esibiva una struttura dogmatica sconcertante per la cultura classica (la divinità una e trina, il Cristo uomo e Dio, mangiare il corpo del Cristo, la resurrezione dei corpi ecc.). Era facile per i dotti pagani sottolinearne le assurdità: non è quindi strano che all'inizio si manifestasse l'opposizione tra la nuova religione e l'antica cultura. Tertulliano ne è il testimone più celebre: «Credo quia absurdum, […] tanto stolto da credere in un dio nato, e da una vergine […]. Morto è il figlio di Dio, è credibile poiché è irreale; e sepolto è risuscitato, è certo poiché impossibile». La contrapposizione è totale: «Che cosa hanno in comune Atene e Gerusalemme?».

Tuttavia, il cristianesimo sin dall'inizio è consapevole di doversi misurare con la cultura classica: Paolo predica all'Areòpago di Atene, Dionigi si converte. Così, lentamente, la parola di Cristo si diffonde fra i dotti e inizia una delle simbiosi culturali più importanti della storia.

La cultura delle nuove popolazioni barbariche si afferma nella cultura latina popolare: nelle saghe ed epopee con i cicli arturiano e carolingio, nella poesia col passaggio dalla quantità metrica all'accento e alla rima, nella musica con la nascita della polifonia e degli accordi di terza e sesta. La cultura romana, sconfitta sul terreno popolare, si poteva trincerare solo nella religione e nella filosofia, uniche sue forme di identità culturale nel medioevo. Le grandi questioni teologiche, come le lotte contro le eresie attraverso le quali si è andata formando l'ortodossia cattolica, diventano terreno di battaglia per quelle argomentazioni filosofiche di tipo dialettico e retorico che avevano caratterizzato la cultura classica.

Agostino e l'estensione del concetto di quantità. Tertulliano era nordafricano e la sua formazione era prevalentemente giuridico-retorica. L'Africa settentrionale negli ultimi anni dell'impero romano è un centro culturale di primaria importanza. Da quelle terre e da quell'ambiente proviene anche il più importante pensatore cristiano della tarda antichità: Agostino (354-430). A lui si deve il primo grande tentativo di fondere il platonismo con il pensiero cristiano, ma è anche uno dei pochi e incerti canali della trasmissione del pensiero matematico antico alla cultura medievale: a lui si devono nel *De quantitate animae* poche pagine contenenti semplici definizioni (punto e segno, figure geometriche) che si ritrovano negli autori medievali. Agostino pone anche un problema nuovo: si può parlare di *quantità*dell'anima? O di *quantità* della carità? L'anima non è un corpo, ma è in un corpo e le sue immagini e i suoi ricordi hanno dimensioni; si può parlare di una «grande» anima o di una «maggiore» carità. E le anime si possono anche contare. Si profila così la possibilità inedita di estendere la quantità al di là delle grandezze geometriche, del tempo e del numero di cose.

La cultura nel medioevo. A questo punto si impone un'osservazione generale sull'epoca che si apre: il medioevo, usualmente ritenuto una lunga sequenza di secoli bui, in cui nessuna luce rischiarava il pensiero, e dai suoi stessi difensori esaltato per il trionfo della fede religiosa e dell'irrazionalità cui il rinascimento e la rivoluzione scientifica avrebbero posto fine. Questa lettura ha portato a ignorare il fatto che aspetti essenziali della nuova scienza, del tutto eterogenei rispetto alla scienza antica, siano apparsi già nel medioevo. Lo stesso intellettuale europeo nasce non nell'antichità ad Atene o Alessandria d'Egitto, ma in quelle lande desolate che nell'alto medioevo costituivano l'Europa. Sua prima incarnazione è il *monaco* benedettino, nel cui precetto «ora et labora» scompare quella scissione netta tra scienza e tecnica tipica della cultura antica, che si formava nella *schola*, parola che in greco e latino significava «ozio». Nel monastero si studia, si ricopiano i codici antichi, si prega e parimenti ci si dedica all'orto, alla falegnameria, al laboratorio, lavorando pietra e metalli. Le minime competenze matematiche che servivano ai muratori per edificare le chiese antiche si affiancavano a quelle necessarie per calcolare la data della Pasqua. Nella conservazione del patrimonio culturale dell'antichità i monasteri ricoprivano un ruolo non privo di contraddizioni: da un lato molti monaci avevano l'abitudine di cancellare antiche pergamene contenenti testi classici del pensiero greco per scriverci le loro omelie, d'altro lato nell'alto medioevo i monasteri divennero gli unici luoghi in cui quegli stessi classici venivano ricopiati e letti.

Il mondo così come era concepito dal cristianesimo non era eterno e immutabile o ciclico come per gli antichi greci, ma creato da un dio artigiano (*artifex*) talora rappresentato con il compasso e gli attrezzi intento a "produrre" l'universo, un dio descritto poi nel rinascimento come il divino «orologiaio» creatore della «macchina» del mondo. Il creato era uniforme, *fabbricato* da Dio: non c'erano divinità, né negli astri né nei fiumi, e appariva ingiustificata la distinzione tra una fisica terrestre e una celeste, così come inaccettabile ogni carattere divino della natura.

Un nome centrale nella storia della trasmissione del sapere logico e matematico antico al medioevo latino è quello di Boezio (480 ca-524 o 526), intellettuale emblema del tentativo dei popoli latini di salvare la propria identità culturale nella nascita dell'Europa all'interno dei nuovi stati barbarici. Senatore al tempo di Teodorico, ne divenne il consigliere, ma non poté evitare di essere coinvolto nelle trame di corte, in un'epoca in cui l'impero bizantino, romano e cristiano, era ancora presente in Italia. Venne giustiziato e la sua morte interruppe il suo tentativo di tradurre in latino tutti i classici della matematica e della logica antica. Alcune sue opere sono andate perdute e quelle rimaste costituiscono il nucleo principale delle conoscenze scientifiche dei greci note nell'alto medioevo europeo: un libro di aritmetica e uno di armonia ricavati da Nicomaco, un libro di geometria che riporta i primi tre libri degli *Elementi*, quasi del tutto senza dimostrazioni. In realtà di quest'ultimo ci sono pervenute due versioni, entrambe però ascrivibili ad autori medievali successivi, anche se probabilmente basate pure sul testo di Boezio. Sebbene concettualmente molto inferiori all'opera di Euclide, questi testi includono alcune aggiunte abbastanza caratteristiche del pensiero medievale. Così la *Geometria ii* inizia definendo la *misura*, che negli *Elementi* era concetto puramente aritmetico, come «qualunque cosa si definisca» non solo in termini di lunghezza, ma anche di peso, capacità e «animo». Dichiara il punto (che in Euclide era caratterizzato solo dall'essere «senza parti») *principium mensurae*, include un libro di proposizioni metriche e considera la geometria utile ai meccanici, ai medici e ai filosofi: si tratta quindi di una rilettura (caratteristica dell'alto medioevo) della geometria teorica all'interno della tradizione pratica, con l'idea agostiniana dell'estensione della categoria della *quantità* al di là delle grandezze geometriche e dei numeri.

Le conquiste del medioevo. L'estensione del «regno della quantità» è una delle novità medievali che risultano cruciali per la nascita della scienza moderna. Il superamento della distinzione tra scienze e tecniche e la progressiva fusione fra tradizione pratica e teorica ne sono un altro aspetto essenziale, anche se nelle università medievali e nell'umanesimo riapparirà una forma di elitarismo della teoria rispetto alle tecniche: di fatto le università del basso medioevo interrompono un processo di osmosi tra scienza e tecnica che invece era evidente nell'alto medioevo, e riemergerà nel rinascimento.

Un altro aspetto essenziale che compare nel medioevo è il superamento dell'idea greca di scienza come pura *scienza di universali*, per cui era scienza descrivere col sillogismo la causa delle eclissi, ma non era scienza individuarne la data, fatto tecnico che solo con Claudio Tolomeo tornò a caratterizzare l'astronomia. Le idee generali della filosofia naturale aristotelica nel medioevo si estendono invece ai fatti individuali e tecnici, segnando il trionfo di scienze quali l'astrologia e l'alchimia.

L'attenzione verso l'individuo, una delle tematiche più innovative del pensiero cristiano, trova nel francescanesimo la sua lettura più radicale; questo aspetto sarà destinato a caratterizzare una scienza che parla anche di singole cose e non di sole idee, nella quale i fatti individuali non sono solo istanze individuali di attributi universali delle specie, ma fatti complessi, effetti di innumerevoli relazioni causali. Così si assiste al formarsi di un sistema culturale medievale intorno al pensiero cristiano in cui cominciano a delinearsi i caratteri fondamentali della scienza moderna.

Questi processi culturali nell'Occidente si affiancavano a una crescente capacità di assimilare e trasformare novità tecnologiche in gran parte importate dall'Oriente, che riguardavano le tecniche agricole, i finimenti del cavallo, l'uso dei mulini per produrre energia, nuove tecniche costruttive: acquisizioni destinate a trasformare non solo l'economia ma anche il potenziale bellico degli europei. Tuttavia, anche se si intravedevano tutte queste novità, l'Europa occidentale nell'alto medioevo restava, rispetto ai grandi imperi orientali, un continente sottosviluppato.

L'impero romano d'Oriente durò mille anni dopo la caduta di quello d'Occidente. E nei secoli tra la fine dell'antichità e l'inizio del medioevo, soprattutto ad Alessandria, esso fu la dimora della cultura classica. Qui operavano gli ultimi grandi filosofi, da Plotino, padre del neoplatonismo, a Simplicio, uno dei massimi commentatori di Aristotele. Interessante la figura di Giovanni Filopono (490 ca-570), altro esponente della fusione tra pensiero classico e cristiano, e primo pensatore a sottoporre la filosofia naturale dominante, quella aristotelica, a una critica moderna. Aristotele infatti rifiutava il vuoto e l'idea di uno spazio tridimensionale "contenitore" delle cose, considerava la fisica dei cieli e quella terrestre del tutto diverse, riteneva il mondo eterno, considerava la materia una realtà solo negativa, priva di proprietà e dimensioni, e credeva che la velocità di caduta di un grave crescesse col peso. Tutte tesi che Filopono rigetta, anche se occorrerà aspettare un millennio per vedere quelle critiche pienamente accolte.

La matematica nell'Islam

Nell'alto medioevo in Oriente, a differenza di quanto avviene in Occidente, la tradizione matematica pratica vive un periodo di intenso sviluppo: la tradizione della matematica babilonese in Mesopotamia si sovrappone ad aree di cultura greca, dall'Egitto alla Siria, ad aree più orientali, dalla Persia all'Afghanistan, in cui si avverte l'influenza della matematica indiana. Saranno soprattutto queste aree più orientali, intorno alla Baghdad delle «mille e una notte», il centro della matematica islamica.

In queste aree nel vii secolo si afferma l'Islam; caratterizzato da un'incredibile capacità di espansione, l'Islam si diffonde dalla Spagna all'India occidentale, lungo quella che era sempre stata la grande via di comunicazione tra Occidente e Oriente. La matematica islamica affonda le sue radici nella tradizione pratica ma si mostra capace di comprendere anche gli aspetti più avanzati della tradizione teorica greca, e soprattutto di sviluppare in modo originale aspetti della matematica che saranno alla base della scienza moderna.

Oltre agli importanti sviluppi nell'ottica, nell'alchimia, nella trigonometria, nell'astronomia, vanno soprattutto sottolineati i contributi della matematica islamica in due campi: la notazione numerica decimale di origine indiana e l'algebra.

Il sistema decimale e l'idea di algoritmo. La nuova notazione numerica, col passaggio al sistema decimale indoarabo, si diffonde a partire dal testo di al-Khuwārizmī (780 ca-850 ca). Questo sistema era apparso in India almeno dal 595. In genere questo passaggio viene considerato come puramente notazionale e la sua importanza viene ascritta soprattutto al carattere posizionale del sistema, in cui il valore di ogni simbolo è legato alla sua posizione all'interno del numero (un 3 può valere tre unità, tre decine, tre centinaia ecc. a seconda della sua posizione). Questo aspetto tuttavia può essere ritenuto secondario; già il sistema sessagesimale babilonese era posizionale e, ancora più importante, anche nello stesso abaco i sassolini avevano un valore posizionale. La novità essenziale è invece la nascita dell'idea di *algoritmo*, come procedura di manipolazione sintattica dei segni numerici. Infatti nella matematica dell'abaco i segni numerici non entravano nel calcolo, ma servivano solo per registrare i dati iniziali e finali. Le cifre indoarabe sono invece gli ingredienti essenziali degli algoritmi con cui le operazioni sono svolte.

Il passaggio dall'abaco agli algoritmi sembra essere stato nei paesi islamici meno travagliato di quanto non sia stato in Europa. Probabilmente tra i due metodi vi erano punti di contatto: forse all'inizio gli stessi calcoli coi numerali venivano fatti sull'abaco (i numerali indoarabi occidentali venivano detti *ghubar*, «polvere»). Nell'Islam non ci sono tracce di una contrapposizione rigida fra i due metodi: del resto, come già detto, lo stesso abaco aveva una struttura di base posizionale e in genere anche decimale per gli interi: forse il nuovo sistema era inizialmente soprattutto un uso di simboli nel calcolo con l'abaco.

Va rilevato che l'idea di algoritmo porta con sé un'inaudita estensione del concetto di numero, in quanto gli algoritmi vengono estesi rapidamente alle frazioni. Tra i segni appare anche lo *zero* (un circoletto per denotare la colonna vuota sull'abaco), mentre l'*uno*viene trattato come le altre cifre (come nell'abaco). L'antica idea di numero si sfalda così a partire dal suo uso algoritmico, mentre nel contempo si attenua la distinzione fra la tradizione pratica e quella teorica. In astronomia e trigonometria i rapporti incommensurabili appaiono come *misure* di intervalli, diventando di fatto numeri, ignorando la complessa teoria dei rapporti di Eudosso: Omar al-Khayyām ritiene che *l'essenza del rapporto debba essere la sua misura*, e si chiede se «il rapporto sia legato al numero non per natura, ma con l'aiuto di qualcosa di esterno, o il rapporto sia per natura un numero e non abbia bisogno di niente di esterno»: il rapporto è ormai un numero. Dopo sei secoli Newton definirà viceversa il numero (reale) come un rapporto tra una grandezza e un'altra grandezza della stessa specie, intesa come unità.

I numeri diventano segni: non sono più caratterizzati come attributi delle cose, ma definiti operativamente dagli algoritmi e dalle misure. L'estensione dell'idea di numero arriva così quasi a prefigurare l'idea di numero reale e l'isomorfismo tra il continuo geometrico della retta e il continuo numerico dei numeri reali.

Ma l'idea di *numero* (intero positivo) come *molteplicità* tarderà a scomparire, così che l'estensione della notazione indoaraba ai decimali dovrà attendere Stevin, e nel frattempo le grandezze trigonometriche continueranno a essere indicate, in Oriente come in Occidente, come numeri interi relativi a cerchi di raggio grande, tanto più grande quanto migliore deve essere la loro approssimazione (Regiomontano userà un raggio di 600 milioni!).

L'algebra. La seconda grande novità introdotta dalla matematica islamica è lo sviluppo dell'*algebra sintattica*.

Anch'essa appare nell'opera di al-Khuwārizmī, che non sembra però essere stato influenzato da Diofanto. Rispetto all'algebra babilonese, l'algebra islamica ha di fatto una struttura anfibia: da un lato vi è la tecnica sintattica per trasformare il problema in equazione, dall'altro permane la tecnica geometrica per risolvere le equazioni.

Mentre nell'approccio babilonese ogni problema sembrava fare storia a sé, ora tutti i problemi erano riducibili a una delle sei forme canoniche, e quindi andavano studiate solo sei procedure di risoluzione. A noi esse appaiono equivalenti (spostando i membri e cambiandoli di segno), ma non ai matematici dell'epoca, in quanto il "senso" di queste equazioni restava geometrico e in tale approccio tutte le grandezze dovevano essere positive, così che le sei forme richiedevano soluzioni distinte.

Le tecniche di manipolazione simbolica si estendevano poi al calcolo di espressioni contenenti radicali o radicali doppi come per esempio (usando una notazione moderna)

L'importanza dei segni. Non deve sfuggire la sottile omogeneità sintattica che lega la nuova notazione numerica indoaraba alla nuova algebra simbolica: come già in Diofanto, il trattamento sintattico algebrico affonda le sue radici nella manipolazione aritmetica della tradizione pratica, in cui è assente l'opposizione tra numeri e grandezze. Questo è in fondo anche abbastanza ovvio poiché entrambe le tecniche nascevano su una base aritmogeometrica; ora accade che questi aspetti della tradizione pratica causino mutamenti epocali nella stessa struttura cognitiva della matematica. Sostanzialmente si delinea un ruolo inedito dei *segni*, che nella matematica greca avevano un ruolo secondario. Tanto l'estensione del concetto di numero e la numerazione indoaraba quanto la nascita della manipolazione algebrica simbolica significano che l'idea di *quantità* non è più caratterizzata dalla *confrontabilità* e dall'*enumerazione*, ma dal trattamento *sintattico*. I numeri e le grandezze cominciano a uniformarsi nell'essere soprattutto segni, e i segni cominciano a essere i componenti essenziali dell'algoritmo, che a sua volta si caratterizza come manipolazione di segni secondo regole.

La matematica in Europa

Nel secolo xi l'Europa occidentale comincia a risollevarsi dalle condizioni miserabili dell'alto medioevo. Riprendono i commerci, rifioriscono le città e gli eserciti europei cominciano ad affermarsi nelle guerre contro l'Islam: la *reconquista* della Spagna e le crociate ne saranno gli aspetti più evidenti. In questa fase l'Europa si apre alla matematica islamica. Soprattutto in Spagna vengono importate tecniche e strumenti, e sono tradotti in latino testi sia islamici sia di origine greca. L'imponente lavoro di traduzione è reso possibile dal carattere multilinguistico della civiltà medievale che in Spagna raggiunge il suo culmine in una città come Toledo, dove convivono dotti che parlano più lingue (l'arabo, il latino, l'ebraico). Si traducono testi medici, astrologici e alchimistici e anche i classici della matematica e il *corpus* aristotelico.

Emblematica di quest'epoca è la figura del francese Gerbert d'Aurillac (946 ca-1003), che fu papa col nome di Silvestro ii. I suoi viaggi lo avevano condotto in Spagna, dove aveva avuto contatti con la scienza araba e da dove si era procurato strumenti astronomici; in seguito a tale esperienza si era costruito un abaco che differiva da quelli tradizionali per il fatto di usare, al posto dei sassolini, gettoni con incise le cifre indoarabe, così che invece di mettere sulle colonne dell'abaco quattro sassolini si metteva un gettone col numero 4 (non serviva alcun gettone per il numero *zero*, che nell'abaco coincideva con la colonna vuota). Forse quest'abaco particolare è una traccia della derivazione della nuova aritmetica da quella antica legata all'abaco. Anche in Europa è la tradizione pratica a dominare, e si diffondono procedure approssimate per la costruzione di figure geometriche non realizzabili elementarmente con riga e compasso, come l'ettagono. Come nell'Islam, si attenua la distinzione tra *tecniche* (meccanica, ottica, scienza dei pesi, statica, architettura, medicina) e *scienze*.

La diffusione delle nuove tecniche matematiche in Europa sarà tuttavia più lenta e incerta che nei paesi islamici e le procedure di calcolo resteranno a lungo quelle tradizionali. Per esempio a Gerbert d'Aurillac veniva posta la questione se il triangolo equilatero, il cui lato ha lunghezza 7 piedi, possedesse area 28 ($7 \cdot 8/2$) o area 21 ($7 \cdot 6/2$). Rispondeva 21, valore approssimato corretto, derivato dalla regola secondo cui l'altezza del triangolo equilatero è circa 1/7 più piccola del suo lato (fig. 12).

Interessante osservare che il 28 derivava invece dalla regola dei numeri triangolari. Infatti aritmogeometricamente sono 28 le monadi che costituiscono il triangolo (fig. 13).

Altro esempio è un calcolo che appare in un testo del xii secolo: «Il nostro algorista ha realizzato la divisione di 100 *librae* per 11 *merciai*. La singola *libra* restante dalla divisione egli la pone uguale a 40 solidi. L'ulteriore resto di 7 solidi viene trasmutato in nummi, dei quali 12 fanno un *solidus*. Di nuovo rimangono dalla divisione altri 7 nummi, e per questi si devono comprare uova delle quali i *merciai* si devono servire a pranzo. Per ogni *nummus* si ottengono 13 uova, in totale così 91 e si dividono di nuovo queste per 11, così rimane ancora un resto di 3 uova. Queste si devono dare in ricompensa a chi ha realizzato la spartizione o barattare con del sale che debba essere mangiato probabilmente sulle uova». I numeri sono ancora solo interi con diverse unità di misura, eterogenee ma connesse tra di loro mediante rapporti di conversione fissi.

La distanza tra scienza e tecnica. Alla fine dell'alto medioevo l'Europa sembrava destinata a seguire anch'essa la strada della progressiva attenuazione della separazione tra scienza e tecnica, notata già nei monasteri all'inizio del medioevo. C'era un diffuso pragmatismo nello studio anche dei problemi matematici; per esempio, sembrava strano ritenere rette e curve inconfrontabili: bastava un filo piegato in modo da coincidere con la curva e poi raddrizzato per poterlo misurare.

Ma verso la fine dell'xi secolo si profila una trasformazione profonda nella realtà culturale europea: la nascita delle *università*. Con esse il solco tra scienza e tecniche si approfondirà di nuovo, fino alla fine del medioevo. Nelle università si leggono gli *Elementi* di Euclide ma, mentre nella matematica islamica il testo aveva il ruolo di fonte di conoscenze utilizzabili, nell'università medievale esso apparirà sempre come riferimento «ideologico» di un sapere scientifico assolutamente certo e necessario, ma indifferente alle tecniche: nell'Islam si apprezzano i *risultati* euclidei, in Europa si apprezza lo *stile* euclideo. Non sarà però un passo indietro, ma solo una deviazione per aprire la via a una nuova scienza dai caratteri assolutamente inimmaginabili.

Il basso medioevo e il rinascimento

Intorno all'anno 1100 un giovane francese figlio di nobili di provincia, Pietro Abelardo (1079-1142), si recava a Parigi per completare la sua formazione. Da alcuni decenni l'insegnamento stava rifiorendo in Europa e stava spostandosi dai monasteri benedettini e cisterciensi nelle campagne verso le scuole delle cattedrali nelle città; i maestri delle università erano spesso legati al mondo religioso e nel xiii secolo provenivano di frequente dagli ordini mendicanti, domenicani e francescani.

Il rifiorire delle città è forse il dato più rimarchevole dell'Europa dell'epoca, dovuto non solo al risveglio dell'economia e dei commerci, ma anche al fatto che le città erano un luogo più aperto e dinamico, meno soggetto ai condizionamenti della società feudale in disfacimento: «l'aria della città rende liberi», recitava un motto germanico. La figura di Pietro Abelardo, con il suo tormentato amore per Eloisa, le sue disavventure, i suoi scontri con i maestri legati al mondo dei monasteri e con le gerarchie della chiesa, il suo insegnamento brillante di una logica erede di quella greca ma nel contempo legata ai tempi nuovi, si presenta in un certo senso come emblema della nascita dell'università parigina.

La nascita delle università. Il nuovo fenomeno culturale non era limitato alla sola Francia. Qualche anno prima Irnerio aveva portato i *libri legales*, i codici del diritto romano, da Roma a Bologna, e qui ne aveva iniziato l'insegnamento. Tanto gli studenti quanto i docenti dovevano adeguarsi al clima sociale delle città basato sulla struttura delle corporazioni, le cosiddette *universitates*, in tutta Europa costrette a divincolarsi tra le gerarchie religiose e il potere politico, ma destinate a mutare la storia del pensiero e della civiltà.

Avevano uno spiccato carattere professionale: le tre facoltà maggiori erano giurisprudenza, medicina e teologia, e poi, propedeutica a queste, la facoltà di arti, nella quale veniva insegnato il quadrivio matematico (aritmetica, geometria, astronomia, musica) e il trivio (grammatica, retorica, logica). La matematica insegnata era poca, e comprendeva un po' di Euclide e di aritmetica. Col tempo crebbe il ruolo dell'astrologia, destinata anche ad avere un posto importante nella medicina. Ma gli aspetti più interessanti della matematica nelle università concernevano il suo rapporto con la filosofia naturale.

Leonardo Fibonacci e Giordano Nemorario

Quello universitario era un insegnamento largamente indifferente alle tecniche, ma fuori delle università la rinascita economica creava in molte professioni una crescente domanda di matematica pratica ed erano i paesi di cultura islamica il luogo dove trovare le tecniche opportune. Non è quindi casuale che il primo vero matematico europeo provenga da una famiglia di mercanti pisani e la sua formazione si svolga sulle coste settentrionali dell'Africa all'inizio del xiii secolo.

È Leonardo da Pisa, detto il *Fibonacci* (1170 ca-1230), *filius Bonacci*, dal nome del padre. Il suo testo principale noto come *Liber abaci*, è dedicato all'algebra araba e ai temi classici della tradizione pratica, dagli algoritmi numerici alle applicazioni commerciali (con grande attenzione a dettagli quali le unità di misura nelle diverse città, le leghe metalliche ecc.). Anche lo stile, fondato su problemi, è nel solco di quella tradizione. Va comunque sottolineato come Fibonacci fosse un matematico raffinato, buon conoscitore anche di quella parte della tradizione teorica, Euclide innanzitutto, che era entrata già nella matematica araba. Occorre tuttavia fare qualche osservazione. In primo luogo, nel libro, nonostante il nome, non si usa mai l'abaco, ma sempre i nuovi algoritmi basati sulle cifre indoarabe. Succedeva lo stesso nelle cosiddette *scuole d'abbaco*, di cui si parlerà più avanti. Si conferma così come il termine *abaco* nel basso medioevo finisse col denotare in generale tutta la tradizione pratica, quella che in questo *excursus* è stata chiamata la *matematica dell'abaco*. Una seconda osservazione è che nel libro l'autore introduce le cifre da 1 a 9 come *figure* e lo 0 come semplice *signum*: nonostante lo zero fosse ormai usato negli algoritmi come le altre cifre, esso non appariva ancora esplicitamente come *numero*. Una terza osservazione è che Fibonacci frequentò la corte di Napoli di Federico ii negli stessi anni in cui il sovrano fondava l'università di Napoli anche con scopi pratici, ma non ci sono tracce di un rapporto tra Fibonacci e quella università. È il segno di una frattura che caratterizzò con pochissime eccezioni (soprattutto italiane) la storia della matematica medievale.

I numeri sono sempre definiti in modo usuale, come «somma» o «collezione» di unità, ma appaiono numeri negativi e anche irrazionali, e vengono usate le frazioni in maniera del tutto naturale, così come i rapporti tra quantità eterogenee (quasi inevitabili nei commerci.

Ovviamente se tutte le B_i sono uguali a 10, si ottiene sostanzialmente la rappresentazione decimale, che però Fibonacci non usa. La funzionalità della sua notazione è evidente se si considera che le sottounità di misura all'epoca erano diverse da città a città e raramente decimali, così che quella di Fibonacci era una rappresentazione effettivamente più flessibile di quella decimale, ponendo le B_i uguali ai fattori di conversione tra le unità di misura e le A_i uguali alla misura data, scritta in tali unità. In algebra permane la duplicità tra una manipolazione sintattica e una risoluzione aritmogeometrica: se ne ha traccia nel fatto che l’incognita è detta *cosa* nella manipolazione algebrica del problema, è detta *radice* nella equazione da risolvere.

Fibonacci non è però l’unico protagonista della nascita della matematica in Europa nella prima metà del xiii secolo: va ricordato anche Giordano Nemorario (sec. xiii), probabilmente legato alla facoltà d’arti. In lui lo stile euclideo si dispiega sull’aritmetica, partendo dai libri aritmetici degli *Elementi*. Ma quelle proprietà algebriche che l’antica algebra geometrica concepiva in maniera esclusivamente geometrica cominciano a essere da lui trattate in maniera aritmetica e simbolica, con l’uso di lettere per indicare i numeri generici e parole come *et*, *ductu*, *equalis* per designare somme, prodotti ed equazioni. Si riconosce ancora dietro i simboli un significato geometrico nei passaggi, che hanno però frequentemente il carattere di una semplice manipolazione simbolica di proprietà aritmetiche.

Così per esempio il calcolo del quadrato del binomio, che nell’antichità si basava sulla costruzione geometrica delle figure 3 e 4, appare ora dedotto dalla proprietà distributiva e dal teorema: «Se un numero è diviso in due parti, allora quello che si ottiene dal prodotto del numero intero per una parte è quanto si ottiene dal prodotto della parte per sé stessa e per l’altra parte», cioè in formula moderna $(a + b)a = a^2 + ab$, a sua volta ricavato da un ragionamento puramente aritmetico.

Di Giordano Nemorario va ricordato anche lo studio matematico della statica, con la prima idea del principio dei lavori virtuali, dal quale inizia negli ambienti universitari europei quel rapporto tra matematica e fisica, inedito nella matematica greca, che sarà uno dei caratteri essenziali della scienza moderna.

Fibonacci e Giordano Nemorario presentano varie affinità di linguaggio nonostante avessero una estrazione sociale del tutto diversa: da un lato il mondo dei commerci, dall’altro quello delle università; il primo più attento alle applicazioni, il secondo più concentrato sullo stile dimostrativo. Saranno i secoli successivi, fino al rinascimento, ad approfondire la divaricazione fra questi due mondi e, dal punto di vista delle conoscenze e sulle scoperte, saranno secoli in cui la matematica sembrerà ristagnare.

Si devono così considerare per il basso medioevo due ambienti matematici separati: le professioni e le università. In quest’ultima le conoscenze e innovazioni matematiche sono estremamente limitate. Ma emergono due aspetti che risulteranno importantissimi:

il ruolo della logica e del linguaggio da un lato, il rapporto con la filosofia naturale dall'altro.

L'università e la scolastica

L'importanza assegnata all'analisi dei testi linguistici è uno dei caratteri essenziali della cultura medievale, nella quale base della sapienza e del sapere non era la *natura*, ma un libro, anzi *il libro*, la *Bibbia*. Sino dai primi concili dell'antichità la disputa teologica si era basata sull'analisi logica dei testi. Il sapere degli antichi riguardava un mondo "visto e descritto", per i medievali il sapere era soprattutto "scritto e interpretato".

La logica aristotelica era pervenuta solo in parte ai dotti del medioevo soprattutto attraverso gli scritti di Boezio e di un tardo commentatore di Aristotele, Porfirio. Era stata sufficiente però a dare un'impronta caratteristica alle questioni teologiche dell'epoca. Si può a questo proposito ricordare la celebre prova ontologica dell'esistenza di Dio, dovuta ad Anselmo d'Aosta (1033 o 1034-1109). In essa si assume il punto di vista di un non credente, il quale, proprio in quanto non credente in Dio, deve avere nella mente l'idea di Dio, della quale aspetto essenziale è la perfezione. Ma l'idea di perfezione deve contenere quella di esistenza, in quanto una cosa esistente è più perfetta rispetto a una non esistente, così che anche il non credente deve in definitiva riconoscere la necessaria esistenza di Dio. I punti dubbi di questa prova costituiranno per secoli argomento di discussione basata sul concetto stesso di *esistenza*. Ma anche questo esempio mostra la differenza tra la logica medievale e quella aristotelica. Quest'ultima si fondava sul sillogismo, costruito a imitazione della relazione causale tra i fatti; nella logica medievale, invece, il fondamento è l'analisi dell'uso dei termini nel linguaggio, il quale assume un carattere più tecnico e convenzionale (altro effetto della natura multilinguistica della cultura dell'epoca) ed è anche più autonomo dalla realtà, che non deve semplicemente rispecchiare.

Occam e Buridano. La cultura che si trasmetteva nelle università medievali è nota con il nome di *scolastica*. Pur apparendo molto ostica alla sensibilità moderna, in essa emergono mutamenti cruciali sui temi del linguaggio e del carattere linguistico della scienza, la matematica in primo luogo.

La scienza per i greci riguardava, attraverso gli *universali*, direttamente la realtà ed era in questo un'immagine fedele del mondo, col linguaggio come tramite quasi naturale e non tematizzato. È Guglielmo di Occam (1280 ca-1349 ca) ad abbandonare questa connessione e a intuire come la scienza sia strutturata in proposizioni attraverso le quali descrivere il mondo. Sembra una tipica questione scolastica, ma da qui deriverà anche l'idea che la scienza non è semplicemente l'insieme di tutte le verità necessarie, ma piuttosto un processo in cui essa si costituisce come discorso intorno al mondo. Nella scienza antica una delle categorie con cui trattare le cose era la *quantità*, un sistema di attributi immanenti nel mondo e presenti nel linguaggio naturale come aggettivi: numeri e figure. Ma Occam si rende conto invece di come essi non siano necessari per descrivere il mondo; a tal fine bastano le cose stesse, le *sostanze*, e le loro caratteristiche, le *qualità*. Era una svolta traumatica poiché la matematica, che era stata nell'antichità il cuore dell'idea stessa di *scienza*, ne veniva estromessa.

L'idea che la scienza sia un linguaggio con cui parlare del mondo è un tema nuovo, che investe i successori di Occam. Tra questi Giovanni Buridano (1295 ca-1358 ca), che si pone il problema di trovare un linguaggio che sia non l'immagine del mondo, ma qualcosa di autonomo con cui si possa costruire una scienza che parta dall'esperienza e dalle conoscenze individuali per giungere tramite l'induzione alle conoscenze universali, una scienza che non si contrapponga più alle tecniche in quanto le sue verità non sono più necessarie e certe.

In questa analisi il linguaggio naturale viene letto in termini algebrici; l'individuo viene concepito come *determinatum* (*Socrates*, una costante) o *vagum* (*hic homo*, un'incognita o un segno, analogo alla *cosa* degli algebristi, singolo numero incognito), la cui vaghezza si dissipa tramite l'aggiunta delle condizioni del problema: l'individuo è caratterizzato *ex circumlocutione* come in *Sophronisci filius*. È la nuova connessione tra logica e algebra: la costante, l'incognita, l'equazione e la sua soluzione. Buridano insiste sul fatto che il segno possa avere un significato anche se non rappresenta una cosa esistente (come nei problemi che non ammettono soluzione), e si chiede se *primus rex Franciae christianus* individui univocamente, come ci si chiede se un'equazione abbia un'unica soluzione. Aristotele aveva interpretato il caso del bambino che chiama tutti gli uomini «padre» come conseguenza della mancanza in lui degli universali, Buridano lo interpreta come l'esistenza iniziale di un individuo vago ("un segno") da cui derivano tanto gli individuali quanto gli universali.

Tipica della scrittura medievale era poi l'abitudine massiccia di abbreviare le parole con contrazioni, troncamenti, simboli sovrascritti o convenzionali. Una prassi, pressoché assente nel mondo islamico, che nasceva dal carattere meccanico della copiatura dei manoscritti e al tempo stesso dal carattere tecnico e strumentale del latino medievale e che sarà all'origine del simbolismo che caratterizzerà l'algebra europea: non solo le lettere, ma autentici nuovi simboli quali +, −, =, e successivamente i simboli per le potenze, per le radici ecc. E, come accade spesso nella storia della matematica, i *simboli* diventano *cose*, delle quali parla un *linguaggio*. Si assiste così lentamente alla trasformazione dell'algebra araba attraverso la linguistica e la scrittura medievale, e al lento emergere di un nuovo linguaggio algebrico dotato di una sua autonoma sintassi. Questo processo arriverà a compimento molto più tardi, nel xvii secolo, ma è il medioevo a predisporre l'universo linguistico: le radici dell'algebra simbolica si trovano nella scolastica.

Altro aspetto della logica scolastica che si rivelerà fertile per l'algebra moderna è l'attenzione a una *ars inveniendi* più che a una *ars demonstrandi*. Questa distinzione ricorda quella antica tra analisi e sintesi, ma viene posta in termini di argomentazione logica più che matematica: il sillogismo è la classica procedura per connettere il suo termine inferiore a quello superiore utilizzando il medio, ma se scopo della scienza è trovare tale connessione, allora, dati i due estremi, occorre trovare il medio. Inoltre, la logica medievale cominciava ad abbandonare l'idea che l'unica forma argomentativa fosse il sillogismo, così che l'«arte del trovare» iniziava ad assumere il carattere di un metodo scientifico generale.

rubrica di valutazione compito di realtà “*Filo vs Onto, i percorsi dell’uomo dalla preistoria ad oggi”*, Uda: *La linea dei numeri*

	LIVELLO			
DESCRITTORI/ CRITERI	**AVANZATO**	**INTERMEDIO**	**BASE**	**INIZIALE**
estrapolazione di informazioni e concetti complessi e riutilizzo in contesti diversi	L’alunno comprende ed interpreta messaggi complessi estrapolandone in modo autonomo dati, informazioni, istruzioni e concetti che riutilizza con sicurezza in contesti diversi Analizza e scompone un nucleo informativo (messaggio, testo, immagine). Individua collegamenti e trasferisce informazioni e dati in ambiti disciplinari diversi.	L’alunno inferisce dal contesto significati di parole non note ed informazioni esplicite ed implicite che è in grado di trasferire anche a contesti diversi Analizza un nucleo informativo (messaggio, testo, immagine) e lo sa strutturare mettendo in relazione le conoscenze, anche in contesti non noti	L’alunno rintraccia e comprende in modo autonomo istruzioni e informazioni chiave fornite in modo esplicito Opera semplici collegamenti e confronti. Recepisce un nucleo informativo (messaggio, testo, immagine) individuando relazioni di tipo semplice in contesti analoghi.	L’alunno/a, se opportunamente guidato/a, svolge compiti semplici in situazioni note.
Riconoscere e risolvere problemi di vario genere, individuando le strategie appropriate, argomentando il procedimento seguito e utilizzando in modo consapevole i linguaggi specifici.	L’alunno/a svolge compiti e risolve problemi complessi, mostrando padronanza nell’uso delle conoscenze e delle abilità; propone e sostiene le proprie opinioni e assume in modo responsabile decisioni consapevoli	L’alunno/a svolge compiti e risolve problemi in situazioni nuove, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite.	L’alunno/a svolge compiti semplici anche in situazioni nuove, mostrando di possedere conoscenze e abilità fondamentali e di saper applicare basilari regole e procedure apprese.	L’alunno/a, se opportunamente guidato/a, svolge compiti semplici in situazioni note.
Rilevare dati significativi, analizzarli, interpretarli, sviluppare ragionamenti sugli stessi, utilizzando consapevolmente rappresentazioni grafiche e strumenti di calcolo.	L’alunno/a svolge compiti e risolve problemi complessi, mostrando padronanza nell’uso delle conoscenze e delle abilità; propone e sostiene le proprie opinioni e assume in modo responsabile decisioni consapevoli.	L’alunno/a svolge compiti e risolve problemi in situazioni nuove, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite.	L’alunno/a svolge compiti semplici anche in situazioni nuove, mostrando di possedere conoscenze e abilità fondamentali e di saper applicare basilari regole e procedure apprese.	L’alunno/a, se opportunamente guidato/a, svolge compiti semplici in situazioni note.

Rubrica competenze UDA: la linea dei numeri

CRITERI	AVANZATO	INTERMEDIO	BASE	INIZIALE
CRITERI STRETTAMENTE RICONDUCIBILI ALLA COMPETENZA MATEMATICA				
Utilizzare con sicurezza le tecniche e le procedure (scritte e mentali) del calcolo aritmetico e algebrico, anche con riferimento a contesti reali	L'alunno/a svolge compiti e risolve problemi complessi, mostrando padronanza nell'uso delle conoscenze e delle abilità; propone e sostiene le proprie opinioni e assume in modo responsabile decisioni consapevoli	L'alunno/a svolge compiti e risolve problemi in situazioni nuove, compie scelte consapevoli, mostrando di saper utilizzare le conoscenze e le abilità acquisite.	L'alunno/a svolge compiti semplici anche in situazioni nuove, mostrando di possedere conoscenze e abilità fondamentali e di saper applicare basilari regole e procedure apprese.	L'alunno/a, se opportunamente guidato/a, svolge compiti semplici in situazioni note
Applicazioni	Applica correttamente e con velocità tecniche ed algoritmi di calcolo	Applica adeguatamente tecniche ed algoritmi di calcolo	Applica piuttosto correttamente tecniche ed algoritmi di calcolo	Applica tecniche ed algoritmi di calcolo con il supporto dei compagni o dell'insegnante
Uso di modelli e strategie (*modellizzazione* e attivazione di strategie)	Traduce velocemente e con sicurezza situazioni reali in strutture matematiche per comprenderle e risolverle. Ricerca ed individua con facilità percorsi di soluzione molteplici ed efficaci	Traduce correttamente situazioni reali in strutture matematiche per comprenderle e risolverle. Individua percorsi di soluzione efficaci	Traduce piuttosto correttamente situazioni reali in strutture matematiche per comprenderle e risolverle. Individua semplici percorsi di soluzione	Traduce , con la guida dell'insegnante situazioni reali in strutture matematiche per risolverle. Individua percorsi di soluzione con il supporto dei compagni o dell'insegnante

RUBRICA DI VALUTAZIONE DEI PROCESSI UDA: La linea dei numeri

	AVANZATO	**INTERMEDIO**	**BASE**	**INIZIALE**
COLLABORAZIONE	Collabora attivamente offrendo il proprio contributo, partecipando attivamente al processo di ideazione e realizzazione, proponendo idee creative e accettando quelle degli altri	Collabora offrendo il proprio contributo, partecipando al processo di ideazione e realizzazione, proponendo idee	Collabora con il gruppo, partecipando al processo di realizzazione ed eseguendo quanto gli viene assegnato	Collabora con il gruppo, partecipando al processo di realizzazione ed eseguendo quanto gli viene assegnato, su sollecitazione dell'insegnante o dei compagni
IMPEGNO	Si impegna con continuità e concentrazione durante tutte le fasi del lavoro	Si impegna con continuità durante tutte le fasi del lavoro	Si impegna sufficientemente durante le fasi del lavoro	Si impegna durante le fasi del lavoro se sollecitato dall' insegnante.
AUTONOMIA	Organizza con efficacia e precisione le fasi del lavoro e la gestione del materiale, nel rispetto dei tempi previsti .	Organizza le fasi del lavoro e il materiale assegnato, utilizzando piuttosto adeguatamente le risorse e le informazioni disponibili nel rispetto dei tempi previsti.	Organizza con qualche incertezza le fasi del lavoro e il materiale assegnato al limite dei tempi previsti per il compito richiesto	Organizza le fasi del lavoro e il materiale assegnato in base alle indicazioni dei compagni o dell'insegnante.
PARTECIPAZIONE	Partecipa spontaneamente e ripetutamente con contributi pertinenti e creativi , nel rispetto delle regole della conversazione	Partecipa spontaneamente con contributi adeguati nel rispetto delle regole della conversazione	Partecipa con interventi brevi e piuttosto adeguati rispettando sufficientemente le regole della conversazione	Partecipa se sollecitato dall'insegnante con brevi interventi
REVISIONE	Rivede di sua iniziativa il proprio elaborato evidenziandone criticità al fine di perfezionare il suo lavoro	Rivede il proprio elaborato riconoscendone criticità al fine di migliorare il suo lavoro	Rivede il proprio elaborato su sollecitazione dell'insegnante o dei compagni riconoscendone le più evidenti criticità al fine di migliorare il suo lavoro	Rivede il proprio elaborato se sollecitato riconoscendone le più evidenti criticità al fine di migliorare il suo lavoro solo se supportato dell'insegnante

ASCOLTO ATTIVO	Interviene nelle discussioni con pertinenza tenendo conto di quanto detto e ascoltato, ponendo domande di chiarimento, esprimendo opinioni personali (argomentando le scelte fatte), sintetizzando e/o parafrasando ciò che ha ascoltato	Interviene nelle discussioni tenendo conto di quanto detto e ascoltato , ponendo domande di chiarimento , esprimendo opinioni personali (argomentando le scelte fatte).	Interviene nelle discussioni tenendo complessivamente conto di quanto detto e ascoltato , ponendo domande di chiarimento, esprimendo opinioni personali	Interviene nelle discussioni se sollecitato dai compagni o dall'insegnante. Necessita di opportune domande guida per sintetizzare o parafrasare quanto detto e ascoltato

SCHEDA DI AUTOVALUTAZIONE
Che cosa dovevi realizzare? ……
Pensi di aver eseguito correttamente il compito? ……
Qual è la parte migliore che hai realizzato? ……
Quali difficoltà hai incontrato? …… …… ……………………………………………………………………
Qual è o quali sono le parti da migliorare? …… …… ………………………………………………………………………
Cosa potresti fare per migliorarle? ………………………………………………………………………………………… …… ……………………………………………………………………
Sei contento o scontento del tuo lavoro? …………………………………………………………………………………… Perché? ……

In quale momento di tutte le prove ti sei sentito più tranquillo?

………
…………………………………………………………………

Controllando il tuo lavoro con la rubrica, che valutazione complessiva daresti?




Un ottimo lavoro	Un buon lavoro	Un lavoro discreto	Da migliorare

(continua)

Cosa potresti fare, la prossima volta, per rendere migliore il tuo lavoro?

………
…………………………………………………………………

………
…………………………………………………………………..

Cosa potresti fare, la prossima volta, per lavorare sempre più serenamente e con soddisfazione?

………
…………………………………………………………………

………